1. 방정식 $|x-1|=5$의 모든 해의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$|x-1|=5$에서 $x-1=\pm 5$

(i) $x-1=5$일 때, $x=6$

(ii) $x-1=-5$일 때, $x=-4$

따라서 방정식의 두 실근의 합은

$6+(-4)=2$

2. 이차방정식 $x^2 - x(kx-5) + 3 = 0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - kx^2 + 5x + 3 = 0$이 허근은 가지려면

$D = 25 - 4 \times 3(1-k) < 0$

$25 - 12 + 12k < 0 \quad \therefore 12k < -13$

$\therefore k < -\dfrac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

3. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$　　② $-1-i$　　③ 0

④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$$

$$\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$$

$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$$

$$=\frac{1}{i}-1=-i-1$$

4. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

5. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+3z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $a(b+c)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

㉡ − ㉢에서 $2y-x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

㉠ + ㉣에서 $4y=2 \quad \therefore\ y=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉠, ㉡, ㉤ 에서 $x=1,\ z=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a(b+c)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \cdots ㉠ \\ x - y = 1 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

8. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$　　② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$　　④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x)&=(x+a)(2x-a)\\&=2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

9. $x^2-x+1=0$일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2-x+1=0$, 양변에 $x+1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$x^3+1=0$, $x^3=-1$에서 $x^5=x^3\times x^2=-x^2$
$x^5+\frac{1}{x^5}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots$①
$x^2-x+1=0$를 x로 나누어 정리한다.
$x+\frac{1}{x}=1$
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1$
① 에 대입하면, $x^5+\frac{1}{x^5}=1$

10. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
양변에 $x=2,-2,1$을 각각 대입하면
$0=1+a+b+c,\ 0=-27+9a-3b+c,\ -9=c$
세 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3,\ c=-9$
$\therefore\ a(b+c)=5\times(3-9)=-30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$=x^3+2x^2-4x-8$
$=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

1	1	2	−4	−8		
		1	3	−1		
1	1	3	−1	−9	←	c
		1	4			
1	1	4	3	←	b	
		1				
	1	5	← a			

$\therefore\ a(b+c)=5(3-9)=-30$

11. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

12. x의 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 -3이 남고, $x+3$으로 나누면 27이 남는다. 이 $f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x-9$　② $-6x+9$　③ $2x+3$
④ $-2x-3$　⑤ $2x-3$

해설
$f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$
문제의 조건으로부터
$f(2)=-3,\ f(-3)=27$이므로
$2a+b=-3,\ -3a+b=27$
$\therefore\ a=-6,\ b=9$
따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$이다.

13. $(a^2-1)(b^2-1)-4ab$를 인수분해하면?

① $(ab-a+b-1)(ab-a-b-1)$

② $(ab-a+b+1)(ab-a-b+1)$

③ $(ab+a-b+1)(ab-a+b-1)$

④ $(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

⑤ $(ab+a+b+1)(ab+a-b-1)$

해설

(준식) $= a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab$

$= (a^2b^2-2ab+1)-(a^2+2ab+b^2)$

$= (ab-1)^2-(a+b)^2$

$= (ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

14. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ ③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$
④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$ ⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0,\ b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

16. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1\pm\sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2+bx+c=0$라 하면
$-\frac{b}{a'}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2$,
$\frac{c}{a'}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2-2x-5=0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, $\frac{c'}{a}=-\frac{1}{3}$으로
$3x^2-2x-1=0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a=3$, $c=-5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

17. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x 축의 길이가 3 일 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3 이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 12 이다.

18. $x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}=k$ 라 하면
$x=k+1,\ y=1-k,\ z=2k+3$
그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2+(1-k)^2+(2k+3)^2 \\ &= 6k^2+12k+11 \\ &= 6(k+1)^2+5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때
$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

19. x에 관한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$에서 $a^2\geq 3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2-2(9-2a^2) \\ &= 4a^2-18+4a^2=8a^2-18\end{aligned}$$

$\therefore \alpha^2+\beta^2\geq 8\times 3-18=6$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 6

20. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

21. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, α라고 하면
$\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) + \alpha = 0 \quad \cdots ㉠$
$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha + \left(1 - \sqrt{2}\right)\alpha = -a \quad \cdots ㉡$
$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha = b \quad \cdots ㉢$
㉠에서 $\alpha = -2$를 ㉡에 대입하면
$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore\ a = 5$
$\alpha = -2$를 ㉢에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$
$\therefore\ a + b = 5 + 2 = 7$

22. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

23. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm 2,\ y=\pm 4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm 2,\ x=\mp 4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

24. 0이 아닌 실수 $x,\ y$가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

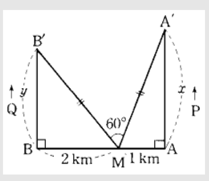
해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0,\ y-2ax=0$
$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm1$

25. 어느 정해진 지점 M에서 정동쪽으로 1 km 떨어진 지점을 A, 정서쪽으로 2 km 떨어진 지점을 B라 할 때, A, B 지점에서 각각 P, Q 라는 사람이 모두 정북쪽으로 달려서 15 분 후에 각각 A′, B′ 지점에 도달했다. $\overline{A'M}$ 의 거리와 $\overline{B'M}$ 의 거리가 같고, 두 선분이 이루는 각이 60° 일 때, P, Q 의 시속은 각각 얼마인가?

① $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ km/h, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ km/h
② $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ km/h, $6\sqrt{3}$ km/h
③ $8\sqrt{3}$ km/h, $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ km/h
④ $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ km/h, $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ km/h
⑤ $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ km/h, $8\sqrt{3}$ km/h

해설



$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 의 거리를 각각 x, y 라 하고 피타고라스의 정리를 이용하면
$\sqrt{x^2+1^2} = \sqrt{y^2+2^2} \cdots$ ㉠
우선 A′, B′ 을 연결하면 $\triangle MA'B'$ 이 만들어지고, $\overline{MB'} = \overline{MA'}$ 이므로 $\angle MB'A' = \angle MA'B'$ 따라서 $\triangle MA'B'$ 은 정삼각형이다.
또, 점 B′ 에서 $\overline{A'A}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 A′B′H 가 만들어지므로 피타고라스의 정리에 의하여
$\sqrt{(x-y)^2+3^2} = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+2^2} \cdots$ ㉡
㉠의 양변을 제곱하여 정리하면,
$x^2 - y^2 = 3 \cdots$ ㉠′
㉡에서 $\sqrt{(x-y)^2+9} = \sqrt{y^2+4}$,
$x^2 - 2xy = -5 \cdots$ ㉡′
㉠′ $\times 5 +$ ㉡′ $\times 3$ 을 하면
$8x^2 - 6xy - 5y^2 = 0,\ (2x+y)(4x-5y) = 0$
$\therefore\ x = \frac{5}{4}y\ (\because\ x > 0,\ y > 0) \cdots$ ㉢
㉢을 ㉠′ 에 대입하면
$\frac{25}{16}y^2 - y^2 = 3,\ y^2 = \frac{16}{3}$
$\therefore\ y = \frac{4}{\sqrt{3}}(\because\ y > 0)$ 이 값을 ㉢에 대입하면 $x = \frac{5}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{\sqrt{3}}$
따라서 P, Q 는 15분 $\left(\frac{1}{4}\text{시간}\right)$ 동안 각각 x, y 만큼 움직였으므로
P 의 시속은 $\frac{5}{\sqrt{3}} \times 4 = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ (km/h)
Q 의 시속은 $\frac{4}{\sqrt{3}} \times 4 = \frac{16\sqrt{3}}{3} =$ (km/h)