1. 이차함수 $y=2x^2-6x+5(2 \le x \le 5)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, ab의 값을 구하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$y=2x^2-6x+5=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+5$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고

아래로 볼록한 포물선이다.

꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x=2$일 때 $y=2\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=1$

$x=5$일 때 $y=2\left(5-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=25$

따라서 최댓값 $a=25$이고, 최솟값 $b=1$이므로 $ab=25$

2. $(2-i)\bar{z}+4iz=-1+4i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은 ? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$z=a+bi$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)=-1+4i$

$(2a-5b)+(3a-2b)i=-1+4i$

$\therefore\ 2a-5b=-1 \cdots ㉠$

$3a-2b=4 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ z=2+i,\quad \bar{z}=2-i$

$\therefore\ z\bar{z}\ =\ (2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$　② $-1 < a < 0$　③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\dfrac{1}{3}$　⑤ $0 \leq a \leq \dfrac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\dfrac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+7) \geq 0$$

$$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$$

$$6a+2 \geq 0 \qquad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

5. 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = \dfrac{4}{3}$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 8 - 3 \times \dfrac{4}{3} \times 2 = 0$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$

$= ax^2 - 4ax + 4a + 5$ 이므로

$b = -4a, \quad -3 = 4a + 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, \ b = 8$

$\therefore a + b = 6$

7. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$ ② $2i$ ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ i

해설

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)=i,\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)=-i$ 이고 $i^4=1$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2004}+(-i)^{2005}$$
$$=i^{4\times501}+(-i)^{4\times501}\times(-i)$$
$$=1+(-i)$$
$$=1-i$$

8. $x = -2 + i$ 일때, $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$의 값은?

① $-15 + 5i$　　② $-12 + 2i$　　③ $14 - 4i$

④ $16 - 6i$　　⑤ $18 - 8i$

해설

$x = -2 + i$ 에서 $x + 2 = i$ 의 양변을 제곱하면

$x^2 + 4x + 5 = 0$ 즉$x^2 + 4x = -5$ 이므로

$x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$= x(x^2 + 4x) - 3x + 2$

$= -5x - 3x + 2$

$= -8x + 2$

$= -8(-2 + i) + 2$

$= 18 - 8i$

9. $\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\sqrt{-4}+\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$ 를 간단히 하면?

① $1+4i$　　② $2+4i$　　③ $-2+4i$

④ $-2+i$　　⑤ $-2-4i$

해설

$$\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+2\cdot 2i+\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}=-2-i+4i+i=-2+4i$$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고
p, q가 유리수이면 남은 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
두 근의 합 $-p=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$
$\therefore p=-4$
두 근의 곱 $q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore p+q=-4+1=-3$

11. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$의 두 근의 비가 $1 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$ ⑤ ± 2

해설

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 3α

$\therefore$ 두 근의 곱은 $3\alpha^2 = 9$ $\therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$

두 근의 합은 $\alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$

$\therefore$ $k = \pm 2\sqrt{3}$

13. 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-4x+1=0$

② $x^2+4x+1=0$

③ $x^2-3x+1=0$

④ $x^2+3x+1=0$

⑤ $x^2-2x+1=0$

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2$

$x^2-(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha})x+(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha})=0$

$x^2-(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta})x+1=0$

$x^2-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}x+1=0$

$\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\cdot(-2)}{-2}=-4$

$\therefore\ x^2+4x+1=0$

14. 이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b + \sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b - \sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b = -4,\ b^2 + 2 = a$
$\therefore\ \ a = 6,\ b = -2,\ ab = -12$

15. x의 이차방정식 $x^2+(a^2-a-12)x-a+3=0$ (a는 실수)의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha+\beta=-(a^2-a-12)=0$, $\alpha\beta=-a+3<0$

$\therefore\ a=4$

16. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k > -2$　③ $k \le -2$

④ $0 < k \le 2$　⑤ $k > 2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱인 $\frac{1}{2-k} < 0$을 만족시키면 된다.

따라서 $k > 2$

17. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면

$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$

잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$

이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$

$k^2 - 12k - 17 = 0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

18. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\dfrac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\dfrac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\dfrac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

19. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

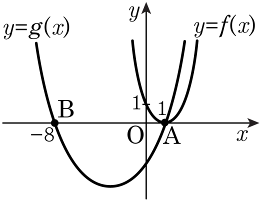
① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

20. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x축과 점 A$(1,\ 0)$에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 x축과 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(-8,\ 0)$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2 의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$ 의 근은?



① $x = 1$

② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$

④ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$ 이므로

$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$

따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,

즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$

$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

21. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

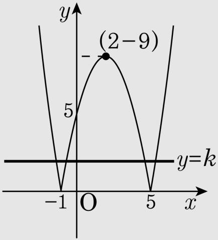
① $0<k<3$　② $0<k<5$　③ $3<k<5$

④ $1<k<4$　⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

22. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0,$

$3x^2+4x-4\leq 0,\ \ (x+2)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

23. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ (단, $a,\ b$는 실수) 라 하면

$(a+bi)^2 = a - bi$

$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2ab = -b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $b = 0$ 또는 $a = -\dfrac{1}{2}$

(i) $b = 0$ 일 때 ㉠에서 $a^2 = a$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = 1$

(ii) $a = -\dfrac{1}{2}$ 일 때 ㉠에서 $\dfrac{1}{4} - b^2 = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, $z = 0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

24. 방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x^2+(a-2)x-2|=1 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x-2=\pm 1$

$x^2+(a-2)x-2=1$ 의 두 근을 α,β 라 하면 $\alpha+\beta=-(a-2)$ $\cdots$ ㉠

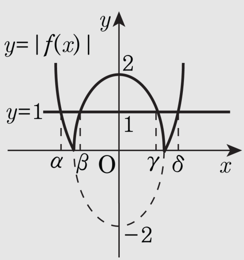
$x^2+(a-2)x-2=-1$ 의 두 근을 γ,δ라 하면 $\gamma+\delta=-(a-2)$ $\cdots$ ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a-2=0$ $\therefore a=2$

해설

$f(x)=x^2+(a-2)x-2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)|=1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ 이기 위해서는$y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a-2=0,\ a=2$