

1. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

- ① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$ ② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$ ④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

2. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응



3. 두 함수 $f(x) = x - 1, g(x) = x^2 + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f))(x) = 18$ 을 만족하는 실수 x 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f))(x) &= f(g(f(x))) = f(g(x-1)) \\ &= f((x-1)^2 + 4) \\ &= f(x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 - 2x + 5) - 1 \\ &= x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

$$(f \circ (g \circ f))(x) = 18$$

$$\text{이므로 } x^2 - 2x + 4 = 18, \quad x^2 - 2x - 14 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 의 값의 합은 2 이다.

4. 두 함수 $f : x \rightarrow x + 1$, $g : x \rightarrow x^2$ 이 있다. $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x + 1)^2$

▷ 정답 : $x^2 + 1$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1$$

5. $\sqrt[3]{9}$ 에 가장 가까운 정수를 x 라 할 때,
 $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{27} \text{에서 } x &= 2 \\ \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} &= \sqrt{2 \pm 1} \text{이므로} \\ \text{준식} &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= (3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2}) = 6\end{aligned}$$

6. $x = \sqrt{15 - 6\sqrt{3}} + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, 다음 표를 이용하여 $\frac{1}{x^2 - 3\sqrt{3}x + 7}$ 의 근사값을 구하면?

구분	근삿값
$\sqrt{2}$	1.414
$\sqrt{3}$	1.732
$\sqrt{6}$	2.450

- ① 2.732 ② 3.732 ③ 2.414 ④ 3.414 ⑤ 3.450

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{15 - 6\sqrt{3}} + 2(\sqrt{3} - 1) \\ &= \sqrt{15 - 6\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 2 \\ &= \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{13 - 2\sqrt{12}} \\ &= 2\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

여기서 $x = 2\sqrt{3} - 1$ 을 $x^2 - 3\sqrt{3}x + 7$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 - 3\sqrt{3}x + 7 &= (2\sqrt{3} - 1)^2 - 3\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 1) + 7 \\ &= (12 - 4\sqrt{3} + 1) - 18 + 3\sqrt{3} + 7 \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 2 + \sqrt{3} \approx 2 + 1.732 = 3.732 \end{aligned}$$

7. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ 에 대하여 x 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때,
 $x + a - \frac{1}{b}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\&= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times \\ \text{정수 부분 } a &= 1, \text{ 소수 부분 } b = x - a = \sqrt{5} - 2 \\x + a - \frac{1}{b} &= \sqrt{5} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\&= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2\end{aligned}$$

8. $\sqrt{10 + \sqrt{96}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a + b + \frac{2}{a + b}$ 의 값을 구하면?

- ① $2\sqrt{6}$
- ② $\sqrt{6}$
- ③ $2 - \sqrt{6}$
- ④ $3 + \sqrt{6}$
- ⑤ $3 + \sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{10 + \sqrt{96}} &= \sqrt{10 + 2\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{4})^2} \\ &= \sqrt{6} + 2, 2 + \sqrt{6} = 4. \times \times \times \\ \therefore \text{정수 부분 } a : 4 \text{ 소수 부분 } b : &= \sqrt{6} - 2 \\ \Rightarrow a + b + \frac{2}{a + b} &= 2 + \sqrt{6} + \frac{2}{2 + \sqrt{6}} \\ &= \sqrt{6} + 2 + \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

9. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y = \frac{x+4}{x+3}$ ② $y = \frac{x+4}{x-3}$ ③ $y = \frac{4x-4}{2x-1}$
④ $y = \frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y = \frac{x+3}{2-x}$

해설

① $y = \frac{x+4}{x+3} = \frac{(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 1$
② $y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{(x-3)+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1$
③ $y = \frac{4x-4}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-2}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1} + 2 = \frac{-1}{x-\frac{1}{2}} + 2$
④ $y = \frac{2x}{2x-1} = \frac{(2x-1)+1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + 1$
⑤ $y = \frac{x+3}{2-x} = \frac{-(2-x)+5}{2-x} = \frac{-5}{x-2} - 1$

10. 유리함수 $y = \frac{ax-b}{x-2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $y = \frac{3x-1}{x+c}$ 의 그래프와 일치한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

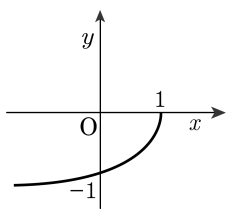
① 0 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-b}{x-2} \Rightarrow y-2 = \frac{a(x+3)-6}{(x+3)-2} \\ \Rightarrow y &= \frac{ax+3a-b+2(x+1)}{(a+2)x+3a-b+2} \\ &= \frac{(a+2)x+3a-b+2}{x+1} \\ \therefore c &= 1, \ a = 1, \ b = 6 \\ \Rightarrow a+b+c &= 8 \end{aligned}$$

11. $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

$$y = -\sqrt{ax+b} + c = -\sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

점(1, 0)에서 시작이므로 $-\frac{b}{a} = 1, c = 0$

$$\therefore b = -a, c = 0$$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$ 이고
주어진 그래프가 점(0, -1)를 지나므로

$$-1 = -\sqrt{-a}$$

양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$$\therefore a = -1$$

따라서 $a = -1, b = 1, c = 0$ 이므로

$$a+b+c = -1+1+0 = 0$$

12. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?

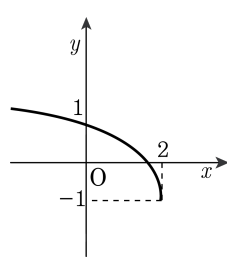
① $y = \sqrt{-2x+4} - 1$

② $y = \sqrt{-x+1} - 1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4} + 1$

④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

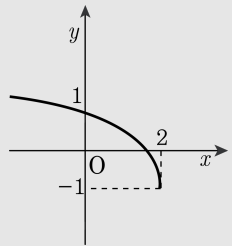
⑤ $y = \sqrt{2x-4} + 1$



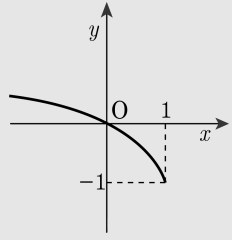
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

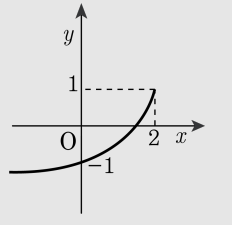
① $y = \sqrt{-2(x-2)} - 1$



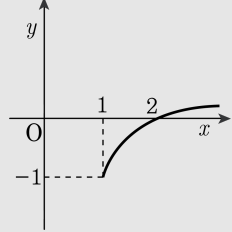
② $y = \sqrt{-(x-1)} - 1$



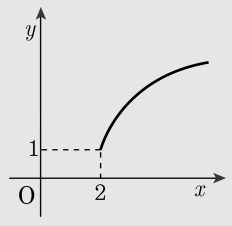
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$



④ $y = \sqrt{x-1} - 1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)} + 1$



13. $\sum_{k=1}^{10} \left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 = 291$$

14. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k 에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2^1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^4}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 12 + 25 + 51 + 102 = 200\end{aligned}$$

15. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\textcircled{m})^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\textcircled{m})^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{m})^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{m})^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\textcircled{\textcircled{m}})^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\textcircled{\textcircled{m}})}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\textcircled{m}$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\textcircled{\textcircled{m}}$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\textcircled{m})^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.
 $\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$
 $\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$
 $\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$

16. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = $\frac{1}{3}$ = (우변) 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}$

위의 식의 양변에 ㉠을 더하면

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + [㉠] = [㉡]$

즉, $n = k + 1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

- ① $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+1}{2k+3}$

② $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+2}{2k+3}$

③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$

④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+2}{2k+3}$

⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$ 의 양변에

$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

(우변) = $\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

= $\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

= $\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$

17. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면
 $\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$
 $(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$
 $a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$
 $a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$
 $(a+10b)(a-12b) = 0$
 $\therefore a = -10b$ 또는 $a = 12b$
이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로
 $a > 0$, $b > 0$
따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

18. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$

⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$20^x = 3$ 이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2 \log_3 2 \end{aligned}$$

19. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 2.25$ 의 값을 계산하면?

① 0.1661

② 0.1761

③ 0.1771

④ 0.3522

⑤ 0.5283

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 2.25 &= \log_{10} (3^2 \times 5^2 \div 100) \\ &= 2\log 3 + 2(1 - \log 2) - 2 \\ &= 0.3522\end{aligned}$$

20. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

- ① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
 $\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
 $= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
 $\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

21. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a \sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$$\log a \sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log a$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2} \log a < \frac{3}{2} \times 3$$

$$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$$

22. 두 양수 $A, \frac{1}{A}$ 의 상용로그에서 정수 부분의 합은 a 이고, 소수 부분의 합은 b 이다. 이때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $\log A$ 의 소수 부분은 0이 아니다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면

$\log \frac{1}{A} = -\log A = -n - \alpha = (-n - 1) + (1 - \alpha)$ 이므로

정수 부분은 $-n - 1$, 소수 부분은 $1 - \alpha$

이때, 정수 부분의 합은 -1 , 소수 부분의 합은 1이다.

$\therefore a^2 + b^2 = 2$

23. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 알맞은 수를 나열한 것은?

$\log 5$, (가), (나), (다), $\log 80$, ...

- ① $1, \log 20, \log 40$
- ② $\log 15, \log 20, \log 40$
- ③ $\log 20, \log 40, \log 50$
- ④ $\log 27, \log 45, \log 50$
- ⑤ $\log 27, \log 45, \log 52$

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 제 n 항을 a_n 이라고 하면
첫째항이 $\log 5$, 제 5항이 $\log 80$ 이므로

$a = \log 5 \cdots \textcircled{1}$

$a_5 = \log 80$ 에서 $a + 4d = \log 80 \cdots \textcircled{2}$

①을 ②에 대입하면

$4d = \log 80 - \log 5 = \log \frac{80}{5}$

$= \log 16 = 4 \log 2$

$\therefore d = \log 2$

$\therefore a_2 = a + d = \log 5 + \log 2 = \log 10$

$a_3 = a_2 + d = \log 10 + \log 2 = \log 20$

$a_4 = a_3 + d = \log 20 + \log 2 = \log 40$

24. 수열 $\log_3 a_1, \log_3 a_2, \log_3 a_3, \dots, \log_3 a_n, \dots$ 이 공차가 -1 인 등차 수열일 때, 수열 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은? (단, $a_1 = \frac{1}{6}$)

- ① $3^{19} - 3$
 ② $3^{10} - 3$
 ③ $3^{11} - 3$
- ④ $3^{12} - 3$
 ⑤ $3^{13} - 3$

해설

$\log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = -1$ 이므로
 $\log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은
 공비가 3 인 등비수열이다.
 $\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}}$
 $= \frac{6(3^{10} - 1)}{3 - 1} = 3^{11} - 3 \left(\because \frac{1}{a_1} = 6 \right)$

25. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \end{aligned}$$

- ①

$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ②

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$
- ③

$\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c|$
- ④

$a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2$
- ⑤

$a + b + c \geq 3^3 \sqrt{abc}$

해설

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0 \text{ 이므로} \\ &a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \\ &\text{③의 경우 양변을 제곱하여 빼면} \\ &3(a^2 + b^2 + c^2) - |a + b + c|^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \\ &\therefore \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c| \end{aligned}$$

26. 다음은 a, b, c 가 실수일 때 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 를 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$
 $([가]) (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \}$ ([나]) 0
 $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a = b = 0$ 일
 $a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$
때 성립)

- ① $\frac{1}{2}, >$ ② $\frac{1}{2}, \geq$ ③ $2, >$ ④ $2, \geq$ ⑤ $2, =$

해설

$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$
두식의차를변형하면
 $\frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$
 $\because a, b, c$ 가 실수이므로 $(a - b)^2 \geq 0,$
 $(b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0$
 $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a = b = c$ 일 때
 $a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$
성립)

27. $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2007}$ ② $\frac{1}{2008}$ ③ $\frac{1}{2009}$ ④ $\frac{1}{4017}$ ⑤ $\frac{1}{4018}$

해설

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ 에서}$$

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

28. 함수 $f(x) = -x + 3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\dots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \dots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$$= f(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \dots$$

$$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3 \text{ 이다.}$$

$$3 \text{ 이 } 1002 \text{ 개이므로 } 3 \times 1002 = 3006$$

29. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

30. $x : y : z = 1 : 2 : 3$ 일 때, $\frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} x = k \text{ 라 하면, } y = 2k, z = 3k \\ \Rightarrow \frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} &= \frac{9k^2}{2k^2} + \frac{k^2}{6k^2} + \frac{4k^2}{3k^2} \\ &= \frac{9}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = 6 \end{aligned}$$

31. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x(x+1)}}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}}$

의 값을 구하면?

- ① $3 + \sqrt{15}$ ② $4 - \sqrt{15}$ ③ $\sqrt{3} + 1$
 ④ $5 - \sqrt{3}$ ⑤ $6 + \sqrt{15}$

해설

$$\sqrt{2x+1 \pm 2\sqrt{x(x+1)}} = \sqrt{x+1} \pm \sqrt{x} \text{ (복호동순)}$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{3} + 1$$

32. $x = \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ ② $-(\sqrt{3}+1)$ ③ $\sqrt{3}+1$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\sqrt{(x+1) \pm 2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \pm 1 (\because x > 1)$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \end{aligned}$$

33. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$
 $a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$
 $\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$
 a, k 가 정수이므로
 $3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, \quad k = 6$

34. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 소수 부분을 p 라고 할 때, $2\left(p - \frac{1}{p}\right)$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$

② 3

③ $3 - \sqrt{3}$

④ $\sqrt{3} - 3$

⑤ $2 - \sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} \\ &= \sqrt{3} + 1\end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} + 1\sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$$

$$\therefore P = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow 2\left(P - \frac{1}{P}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} - 3$$

35. m 이 유리수일 때, $\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$ 가 유리수가 되도록 하는 m 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} \cdot \sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$$\therefore m^2-5m+6=0 \quad \therefore m=2, 3$$

36. 유리수 a, b, c 에 대하여 $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} &= 1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \text{ 에서} \\ a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6} &= \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \therefore a &= \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{4} \\ \therefore a+b+c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

37. 일차 이상의 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ 을 $3x - 1$ 로 나눈 나머지를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 $\frac{p}{4} - \frac{1}{q} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ (p, q 는 자연수)로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$f(x)$ 를 $3x - 1$ 로 나눈 나머지는

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \frac{3}{2} \times 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 15 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{59}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$\therefore p + q = 59 + 4 = 63$$

38. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

39. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n - 1)(2n + 1) = 0$ 의 두근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= -4 \\ \alpha_n \beta_n &= -(2n - 1)(2n + 1) \\ \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n - 1)(2n + 1)} \\ \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\alpha_k + \beta_k}{\alpha_k \beta_k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k - 1)(2k + 1)} \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right) \\ &= \frac{4}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

40. $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{24}$
- ② $\frac{1}{48}$
- ③ $\frac{5}{16}$
- ④ $\frac{5}{24}$
- ⑤ $\frac{5}{48}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 &= 1 + 3 = 2 + 2 = 4 \circ \text{므로, } a_n = 2n + 2 (n \geq 1) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

41. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a_2 = -1$
㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$
㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 에서 $n = 1$ 을 대입하면
 $2\sum_{k=1}^1 a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$
즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$
 $\therefore a_2 = \frac{4a_1 + 1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ (참)
㉡ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots \text{㉠}$
 $2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots \text{㉡}$
㉡-㉠에서
 $2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $\therefore 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$ (거짓)
㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$
 $= 2(3a_{n+1} - a_n)$
따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다. (참)
따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

42. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
 이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

43. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 2, \\ 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n &= 0 \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$$

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라하면

$$2b_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

$\therefore \{b_n\}$ 은 초항이 1이고

공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\vdots$$
$$+ \left| a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right|$$

$$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$$

$$a_n = 3 - 2^{-n+2}$$

$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$

$$p = 3, \quad q = -48 \quad \therefore p + q = -45$$

44. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\log_3 a_n - 2 \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족하고, $a_1 = 1, a_2 = 3$ 일 때, $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 18

해설

$\log_3 a_n - 2 \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 에서

$$2 \log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + \log_3 a_{n+2}$$

$$\log_3 a_{n+1}^2 = \log_3 a_n a_{n+2}$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ 이므로 첫째항은 } 1 \text{ 이고, 공비는 } 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \text{ 이므로 } a_{10} = 3^9$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9$$

45. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $2^{4+2} + 3^{1+2} = 91 = 13 \cdot 7$ 로 13의 배수이다

(ii) $n = k$ (k 는 자연수)일 때 성립한다고 가정하면
 $2^{4k+2} + 3^{k+2} = 13m$ (m 은 자연수)
 $2^{4(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} = \textcircled{\small{\text{㉠}}} \cdot 2^{4k+2} + \textcircled{\small{\text{㉡}}} \cdot 3^{k+2}$
 $= \textcircled{\small{\text{㉢}}} \cdot 13m + \textcircled{\small{\text{㉣}}} \cdot 3^{k+2}$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $2^{4n+2} + 3^{k+2}$ 은 13의 배수이다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 의 13의 배수이다.

위

의 증명에서 ㉠,㉡,㉣에 알맞은 수들의 합은?

- ① 1 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$2^{4k+2} + 3^{k+2} = 13m$ 일 때
 $2^{4(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2}$ 도 13의 배수가
되는지 확인하는 과정이다.
 $2^4 \cdot 2^{4k+2} + 3 \cdot 3^{k+2}$
 $= 2^4 \cdot (13m - 3^{k+2}) + 3 \cdot 3^{k+2}$
 $= 2^4 \cdot 13m - 16 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^{k+2}$
 $= 2^4 \cdot 13m + (-13) \cdot 3^{k+2}$
 $\therefore \textcircled{\small{\text{㉠}}} = 16, \textcircled{\small{\text{㉡}}} = 3, \textcircled{\small{\text{㉣}}} = -13$
 $\therefore \textcircled{\small{\text{㉠}}} + \textcircled{\small{\text{㉡}}} + \textcircled{\small{\text{㉣}}} = 6$

46. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{(가)}$
 $= k^2 + \boxed{(가)} = \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① $2k - 1, (k + 1)^2$
- ② $2k, k + 1$
- ③ $2k, (k + 1)^2$
- ④ $2k + 1, k + 1$
- ⑤ $2k + 1, (k + 1)^2$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k + 1}$ 를 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{2k + 1}$
 $= k^2 + \boxed{2k + 1} = \boxed{(k + 1)^2}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore (가) = 2k + 1, (나) = (k + 1)^2$

47. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$\begin{aligned}x^3 &= \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \\&= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) \\&= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) \\&= 2 - \frac{1}{2} - 3x\end{aligned}$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

48. $a > 0$ 이고, $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 6$ 일 때, a^{2x} 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{3}{5}$

③ 1

④ $\frac{7}{5}$

⑤ $\frac{9}{5}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 6 \text{ 에서}$$

$$a^x + a^{-x} = 6(a^x - a^{-x}), \quad 5a^x = 7a^{-x}$$

양변에 a^x 를 곱하면

$$5a^{2x} = 7$$

$$\therefore a^{2x} = \frac{7}{5}$$

49. 집합 M 을 $M = \{3a + 5b | a, b \text{는 음이 아닌 정수}\}$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ㉠ $89 \in M, 97 \in M$

㉡ $K \in M \Rightarrow K + 3 \in M$

㉢ 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $89 = 9 + 80 = 3 \times 3 + 5 \times 16 \in M$
 $97 = 27 + 70 = 3 \times 9 + 5 \times 14 \in M$

㉡ $3a + 5b = K$ 라 하면
 $K + 3 = 3(a + 1) + 5b \in M$

㉢ $10 = 3 \times 0 + 5 \times 2$
 $11 = 3 \times 2 + 5 \times 1$
 $12 = 3 \times 4 + 5 \times 0$
 $13 = 3 \times 1 + 5 \times 2$
 $14 = 3 \times 3 + 5 \times 1$
이므로 15이후의 자연수는 $10 + 5 = 15, 11 + 5 = 16, 12 + 5 = 17, 13 + 5 = 18, 14 + 5 = 19 \cdots$ 의 꼴로 표현이 가능하다.
따라서 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

50. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$a \in A$ 이면 $\frac{a}{a-1} \in A$ (단, $a \neq 1$)

- ① 0
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $-\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$

$-1 \in A$ 이면 $\frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \cdots$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원

소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

51. 집합 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 C 의 개수는?

$\supset A = B \cup C$

$\subseteq n(A) = 7$

$\subseteq n(B) = 4$

- ① 32개
- ② 16개
- ③ 8개
- ④ 4개
- ⑤ 2개

해설

집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 라 놓으면 집합 A 의 원소는 7개이고,
 $A = B \cup C$ 이므로
 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3\}$ 이 때
집합 C 는 x_1, x_2, x_3 을 반드시 원소로 가져야 하므로
 $\{x_1, x_2, x_3\} \subset C \subset A$
집합 C 는 x_1, x_2, x_3 을 포함하는 A 의 부분집합이므로 그 개수는
 $2^{7-3} = 2^4 = 16$ (개)

52. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는 몇 개인가?

- ① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$A - X = \{1, 4\}$ 이므로 $X = \{2, 3, 5\}$
 $\therefore 2^3 - 1 = 7(\text{개})$

53. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각 $A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\}$, $B = \{x|x \text{는 두 자리 자연수}\}$ 일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

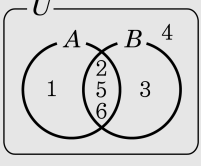
해설

$A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$
 $B = \{x|x \text{는 두 자리 자연수}\} = \{10, 11, 12, 13, \dots\}$
 $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로
 $n(A^c \cup B)^c = 7$

54. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A - B = \{1\}, B - A = \{3\}, A^c \cap B^c = \{4\}$ 일 때, 집합 A 는?
- ① $\{1, 2\}$ ② $\{1, 2, 5\}$ ③ $\{1, 2, 6\}$
④ $\{1, 2, 5, 6\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 6\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A^c \cap B^c = \{4\} = (A \cup B)^c$ 이므로 집합 $A = \{1, 2, 5, 6\}$ 이다.



55. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A (x = 1, 2, 3)$ 이 성립하는 것의 개수는?

- ① 3 개 ② 5 개 ③ 9 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

$$2x - f(x) \in A \text{ 이면, } x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) \in A$$

$$\therefore f(1) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 - f(2) \in A$$

$$\therefore f(2) = 1, f(2) = 2, f(2) = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 - f(3) \in A$$

$$\therefore f(3) = 3$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

56. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 12개

해설

조건 Ⅰ에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면
 $f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면
 $f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ에 의해
 $f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는
원소는 0의 1가지,
1이 대응할 수 있는 원소는
-2, -1, 1, 2의 4가지,
-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

57. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 이라 하고, $P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \times \frac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_n - 1}$ ($n \geq 2$)라고 할 때, P_{1991} 에 가장 근사한 값은?

- ① 2.0
- ② 2.3
- ③ 2.6
- ④ 2.9
- ⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\frac{T_n}{T_n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$
$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$
$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$
$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \approx 2.9$$

58. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

59. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$

③ $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$

④ $\sqrt[3]{2}$

⑤ 1

해설

$a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}, b = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면

$$a^3 + b^3 = 10, ab = -3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$

$a+b = x$ 라고 하면,

$$x^3 + 9x - 10 = 0,$$

$$(x-1)(x^2 + x + 10) = 0$$

$$\therefore x = 1$$

60. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}, \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2, x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}, \frac{1}{y} = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, xy = 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 64 - 12 = 52$$

61. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10} 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = b_n \text{ 이라 하면 } \sum_{k=1}^n b_k = (n+1)^2$$
$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \ (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$

62. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

63. 수열 $\{a_n\}$ 은 처음 12개 항 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 가 서로 다르고 $a_{n+12} = a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시킨다. 이 때, 세 집합
 $A = \{a_{4n+1}, n \text{은 자연수}\}$
 $B = \{a_{5n+2}, n \text{은 자연수}\}$
 $C = \{a_{6n+3}, n \text{은 자연수}\}$
 의 원소의 개수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $p+q+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_{n+12} = a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로 12개의 숫자가 반복하여 나타나는 수열이다.

(i) $b_n = a_{4n+1}$ 이라 하면

$$\{b_n\} = a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, a_{21}, a_{25}, \dots$$

위의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 을 이용하여 다시 쓰면

$$\{b_n\} : a_5, a_9, a_1, a_5, a_9, a_1, \dots \text{이므로 } A = \{a_1, a_5, a_9\}$$

$$\therefore p = n(A) = 3$$

(ii) $c_n = a_{5n+2}$ 라 하면

$$\{C_n\} : a_7, a_{12}, a_{17}, a_{22}, a_{27}, a_{32}, a_{37}, a_{42}, a_{47},$$

$$a_{52}, a_{57}, a_{62}, a_{67}, \dots$$

이므로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 를 이용하여 다시쓰면

$$\{C_n\} = a_7, a_{12}, a_5, a_{10}, a_3, a_8, a_1, a_6, a_{11}, a_4, a_9,$$

$$a_2, a_7, \dots$$

$$\text{이므로 } B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}\}$$

$$\therefore q = n(B) = 12$$

(iii) $d_n = a_{6n+3}$ 이라 하면

$$\{d_n\} : a_9, a_{15}, a_{21}, a_{27}, \dots$$

위의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 를 이용하여 다시 쓰면

$$\{d_n\} : a_9, a_3, a_3, \dots$$

$$\text{이므로 } C = \{a_3, a_9\}$$

$$\therefore r = n(C) = 2$$

$$\text{이상에서 } p + q + r = 3 + 12 + 2 = 17$$

64. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

(가) $a_{4n} = n^2 (n \geq 1)$
(나) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} (n \geq 1)$

- ① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

(나)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4, a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \dots$ 이므로
 $\sum_{k=1}^{40} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40})$
 $= 2a_4 + 2a_8 + 2a_{12} + \dots + 2a_{40}$
 $= 2 \sum_{k=1}^{10} a_{4k} = 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 (\because \text{가})$
 $= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$

65. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

- ① $a_{51} - a_1$
- ② $a_{51} - a_2$
- ③ $a_{51} + a_1$
- ④ $a_{52} - a_2$
- ⑤ $a_{52} + a_2$

해설

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$
$$a_1 = a_3 - a_2$$
$$a_2 = a_4 - a_3$$
$$\vdots$$
$$+) \frac{a_{50} = a_{52} - a_{51}}{\sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2}$$

66. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

- ① $a_{100} - a_{50}$
 ② $a_{101} - a_{50}$
 ③ $a_{101} - a_{51}$
- ④ $a_{102} - a_{51}$
 ⑤ $a_{102} - a_{52}$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a_1 &= a_3 - a_2 \\ a_2 &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$+) \frac{a_{100} = a_{102} - a_{101}}{\sum_{k=1}^{100} a_k = a_{102} - a_2}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad a_1 &= a_3 - a_2 \\ a_2 &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$+) \frac{a_{50} = a_{52} - a_{51}}{\sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=51}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{50} a_k \\ &= (a_{102} - a_2) - (a_{52} - a_2) \\ &= a_{102} - a_{52} \end{aligned}$$

67. m, n 이 정수일 때, $\frac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

- ① 288 ② 2534 ③ 3042 ④ 5164 ⑤ 7254

해설

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}} \text{이고 } \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{4}{m}}$$

이 수가 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$ 과 $-\frac{4}{m}$ 가 모두 자연수가 되어야 하므로

$$n = -1, -2, -3, -6 \text{이고 } m = -1, -2, -4 \text{이다.}$$

따라서 $\frac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은

$$(2^6 + 2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^2 + 3) = 78 \times 93 = 7254$$

68. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

- ① $\sqrt[3]{8}$ ② $\sqrt[5]{8}$ ③ $\sqrt[3]{8}$ ④ $\sqrt[5]{4}$ ⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A , 확대 배율을 a 로 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^5$ 이므로

$$A \cdot a^5 = 2A \text{에서 } a^5 = 2 \quad \therefore a = \sqrt[5]{2}$$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

69. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$ 를 만족하는 k 의 값들 중 최소인 수를 p 라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b 는 서로소)이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로

$$k = 2^{30}, 3^{30}, 4^{30}, \dots$$

따라서, k 의 최소값은 2^{30} 이므로 $p = 2^{30}$ 이다.

$$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore a + b = 17$$

70. $10^a = 2$, $10^b = 3$ 일 때, $\log_{15} 10$ 을 a, b 로 나타내면?

① $\frac{1}{a+b+1}$

② $\frac{1}{a-b+1}$

③ $\frac{1}{a+b-1}$

④ $\frac{1}{b-a+1}$

⑤ $\frac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2$, $10^b = 3$ 에서 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$

$$\log_{15} 10 = \frac{1}{\log_{10} 15}$$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$

$$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$$

$$\therefore \log_{15} 10 = \frac{1}{b-a+1}$$