1. 다항식 $2x^3 + x^2 - 5x + 3$을 $x^2 + x - 1$로 나눌 때, 몫과 나머지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

직접 나누어 보면
$\therefore$ 몫 : $2x - 1$, 나머지 : $-2x + 2$
몫과 나머지의 합은 1

2. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$의 값은?

① 4　② 8　③ 12　④ 14　⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+mx^2+nx+1 \\ &= (x+1)\,Q(x)+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+mx^2+nx+1 \\ &= (x-2)\,Q'(x) \end{aligned}$$

$\therefore f(-1) = -1+m-n+1 = 5$

$f(2) = 8+4m+2n+1 = 0$

$\therefore m = \frac{1}{6},\ n = -\frac{29}{6}$

$\therefore m+n = -\frac{14}{3},\ -3(m+n) = 14$

3. $i^{2000} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $1 - i$ ③ $1 + i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

(준식) $= 1 + (-1) + (-i) + 1$

$= 1 - i$

4. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2-2i$ ② $2\pm 3i$ ③ $2\pm\sqrt{3}i$
④ $3\pm 2i$ ⑤ $4\pm 3i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로
$z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 에서
$(a+bi)(a-bi)=13$, $(a+bi)+(a-bi)=4$
$a^2+b^2=13$, $2a=4$
$\therefore\ A=2,\ b=\pm 3$
$z=2\pm 3i$

5. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

6. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1-i$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

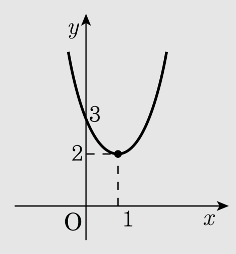
다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1+i$ 이므로
두 근의 합 : $(1+i)+(1-i)=-a \quad \therefore\ a=-2$
두 근의 곱 : $(1+i)(1-i)=b \quad \therefore\ b=2$
$\therefore\ a+b=-2+2=0$

7. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위를 구하면?

① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위는 $2 < y < 3$

8. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ 에서
$x=1,\ x=-1$을 대입하면 성립하므로
$x^4+x^3-7x^2-x+6$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3,\ -1,\ 1,\ 2$
따라서 최대의 근은 2

9. 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

▷ 정답 : $y = -1$

▷ 정답 : $z = 2$

해설

$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에서

$3x + 2y = 7$ ······㉠

$\frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5}$ 에서

$5x - 2z = 11$ ······㉡

$x + 2y + 3z = 7$ ······㉢

㉠ − ㉢을 하면 $2x - 3z = 0$ ······㉣

㉡ × 3 − ㉣ × 2를 하면 $11x = 33$

∴ $x = 3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y = -1$, $z = 2$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

11. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙
② 교환법칙, 분배법칙
③ 분배법칙, 결합법칙
④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙
⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)}\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)}\\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

12. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

13. x에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1}-\frac{x^2-x-3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$ 에서 $A-B$의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.
양변에 $x=2,\ x=-2$를 대입해서 정리하면
$x=2$일 때
$\frac{4-6-1}{1}-\frac{4-2-3}{3}+\frac{2}{2}=\frac{2A+B}{2\times1\times3}$
$-3+\frac{1}{3}+1=\frac{2A+B}{6}$
$\therefore\ 2A+B=-10\cdots$㉠
$x=-2$일 때
$\frac{4+6-1}{-3}-\frac{4+2-3}{-1}+\frac{2}{-2}=\frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$
$-3+3-1=\frac{-2A+B}{-6}$
$\therefore\ -2A+B=6\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4,\ B=-2$
$\therefore\ A-B=(-4)-(-2)=-2$

14. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
x^3+ax^2+bx+3
$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$
$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$
양변의 계수를 비교하면
$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$
$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$
$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

15. $x^4-23x^2y^2+y^4$ 을 인수분해 하면?

① $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
② $(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)$
③ $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$
④ $(x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$
⑤ $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$

해설

(준식) $=x^4+2x^2y^2+y^4-25x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-(5xy)^2$
$=(x^2+y^2+5xy)(x^2+y^2-5xy)$
$=(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$

16. $a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $\angle B = 120^\circ$인 둔각삼각형
② 직각삼각형
③ $\angle B = 150^\circ$인 둔각삼각형
④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A = 35^\circ$인 예각삼각형

해설

$a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)+a(c+b)(c-b)+bc(b-c)$
$=(b-c)\left\{a^2+(c+b)a+bc\right\}$
$=(b-c)(a+b)(a+c)$
$\therefore b=c\ (\because a+b\neq 0,\ a+c\neq 0)$

17. $a+b-2c=1,\ a-b+3c=3$일 때, 다음 중 $a+ab+c^2$을 a에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a-8)(a-2)$　　② $(a+8)(a-2)$

③ $-(a-8)(a-2)$　　④ $-(a-8)(a+2)$

⑤ $-(a+8)(a-2)$

해설

$a+b-2c=1 \quad \cdots$ ㉠

$a-b+3c=3 \quad \cdots$ ㉡

㉠+㉡에서 $2a+c=4$

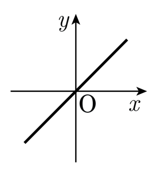
$\therefore c=-2a+4 \quad \cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b=-5+9$

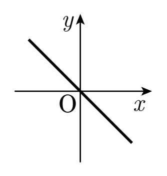
$$\begin{aligned}\therefore a+ab+c^2 &= a+a(-5a+9)+(-2a+4)^2\\ &= -a^2-6a+16\\ &= -(a^2+6a-16)\\ &= -(a+8)(a-2)\end{aligned}$$

18. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, x, y는 실수)

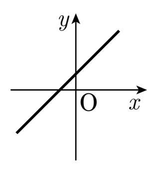
①



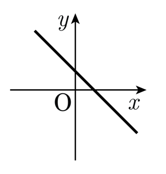
②



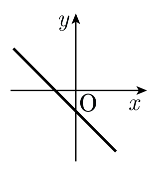
③



④



⑤



해설

$$\begin{aligned}(3+2i)(x+yi) &= 3x+3yi+2xi-2y \\ &= (3x-2y)+(2x+3y)i\end{aligned}$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

19. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

ⅰ) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ⅱ) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

ⅲ) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0 이다.

20. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2$

$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$

$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

21. 이차방정식 $x^2+2(k-m)x+(k^2-n+4)=0$이 실수 k값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 $m+n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$D' = (k-m)^2 - (k^2-n+4) = 0$

모든 k에 대해 성립하려면

$-2m=0$, 그리고 $m^2+n-4=0$

$\therefore m=0, \quad n=4, \quad m+n=4$

22. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$

$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$

23. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$의 그래프가 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$와 $y = -2x$에 모두 접할 때, 상수 a의 값은?

① -2　② $-\frac{3}{2}$　③ -1　④ $-\frac{3}{4}$　⑤ $-\frac{1}{4}$

해설

$x^2 + ax + b = -2x$에서

$x^2 + (a+2)x + b = 0$

$\therefore\ D = (a+2)^2 - 4b = 0 \cdots$ ①

$x^2 + ax + b = \frac{1}{2}x$에서

$x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + b = 0$

$D = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4b = 0 \ \cdots$ ②

①,②에서 $(a+2)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$

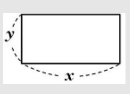
24. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

25. $f(x)=x^3-3x^2-x+3$, $g(x)=f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $R(x)$ 는 0이다. ② $R(x)$ 는 일차식이다.

③ $R(x)$ 는 이차식이다. ④ $R(x)$ 의 상수항은 3이다.

⑤ $R(x)$ 의 상수항은 2이다.

해설

$f(x)=(x-3)(x-1)(x+1)$ 이고

$g(x)=f(x)Q(x)+R(x)$ 에서

$g(x)=(x-3)(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $g(x)=f(f(f(x)))$ 이므로

$g(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(3)=0$

$g(-1)=f(f(f(-1)))=f(f(0))=f(3)=0$

$g(3)=f(f(f(3)))=f(f(0))=f(3)=0$

$\therefore\ g(1)=a+b+c=0,\ g(-1)=a-b+c=0,$

$g(3)=9a+3b+c=0$

$\therefore\ a=b=c=0$

따라서 $R(x)=ax^2+bx+c=0$