1. 방정식 $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{4}$ 의 해를 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2) - 6 = 3(2x+1)$
이항하여 정리하면 $4x - 6x = 3 - 8 + 6$, $-2x = 1$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$

2. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x = -1 + \sqrt{3}$ 인 것은?

- ① $(x+1)^2 = -3$ ② $(x+1)^2 = 3$ ③ $(x+3)^2 = -1$
④ $(x+3)^2 = 1$ ⑤ $(x-1)^2 = 1$

해설

$(x+a)^2 = b$ 에서 $x+a = \pm\sqrt{b}$
 $\therefore x = -a \pm \sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면
① $x = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$
② $x = -1 \pm \sqrt{3}$
③ $x = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$
④ $x = -3 \pm \sqrt{1}$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = -2$
⑤ $x = 1 \pm \sqrt{1}$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + a(a-1)x + 3a = 0$ 의 한 근이 1일 때, 다른 근은? (단, a 는 상수)

① -1 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x = 1$ 을 대입하면

$$1^2 + a(a-1) + 3a = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

$$x^2 - 1 \cdot (-2)x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$= (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -3 \quad \therefore x = -3$$

4. 방정식 $a^2 - (1+x)a + 2x - 2 = 0$ 의 해가 무수히 많을 때, 방정식 $x = (x+3)a - 10$ 의 해는?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$a^2 - a - ax + 2x - 2 = 0, (a-2)x = a^2 - a - 2$$

$$(a-2)x = (a-2)(a+1)$$

i) $a \neq 2$ 일 때, $x = a + 1$

ii) $a = 2$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.

i), ii)에서 $a = 2$ 일 때이다.

따라서 방정식 $x = (x+3)a - 10$ 에 $a = 2$ 를 대입하면

$$x = (x+3) \cdot 2 - 10, x = 2x - 4 \therefore x = 4$$

5. 다음 보기는 방정식 $(ax - 1)a = x - 1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 해가 없다.
 ㉡ $a = 1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.
 ㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax - 1)a = x - 1$ 에서
 $(a^2 - 1)x = a - 1$
 $(a - 1)(a + 1)x = a - 1$
 ㉠ $a = -1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.
 ㉡ $a = 1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.
 ㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 1}$
 따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

6. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - x + 1 = 9$$

$$\therefore x = -4$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - x + 1 = 9 \text{ (성립하지 않음)}$$

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + x - 1 = 9$$

$$\therefore x = 5$$

따라서 모든 근의 곱은

$$(-4) \times 5 = -20$$

7. 방정식 $|x-3| + |x-4| = 2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3) - (x-4) = 3, -2x = -5$

$\therefore x = \frac{5}{2}$

ii) $3 \leq x < 4$ 일 때

$(x-3) - (x-4) = 2, 0 \cdot x = 1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $x \geq 4$ 일 때

$x-3 + x-4 = 2, 2x = 9$

$\therefore x = \frac{9}{2}$

따라서 $x = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

8. 연산 $*$ 를 $a * b = ab + 2(a + b)$ 라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β 라 한다. 이때, $|\alpha - \beta|$ 의 값은?

$$(3x * x) - (3 * x) + \{(-1) * 2\} = 0$$

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서

$$3x * x = 3x \cdot x + 2(3x + x) = 3x^2 + 8x, \quad 3 * x = 3 \cdot x + 2(3 + x) = 5x + 6,$$

$$-1 * 2 = (-1) \cdot 2 + 2(-1 + 2) = -2 + 2 = 0$$

$$\text{주어진 식은 } 3x^2 + 8x - (5x + 6) + 0 = 0$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \text{ 에서 } 3(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \quad \therefore |\alpha - \beta| = 3$$

9. 실수 a, b 에 대하여 연산*를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x * (x-6) &= 0 \text{ 에서} \\x^2 + x - 6 &= 0 \\(x+3)(x-2) &= 0 \\\therefore x &= -3, 2 \\\therefore \alpha &= -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta) \\\therefore \alpha + 2\beta &= 1\end{aligned}$$

10. 방정식 $x^2 - 2|x - 3| = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

11. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0$ 이므로
 $x = -2, x = 3$
그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 3$

(ii) $x < 1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 - x + 1 - 6 = 0$
 $x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
 $x = -1, x = 4$
그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -1$

(i), (ii)에서 $x = 3, -1$ 이므로
두 근의 합은 2

12. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 근이므로
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

13. 방정식 $|x+1| + \sqrt{(x-2)^2} = x+3$ 의 근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-(x+1) - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ ($x < -1$ 에 부적합)

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1 - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = 0$

iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1 + x-2 = x+3$
 $\therefore x = 4$

(i), (ii), (iii)에 의해 $x = 0, 4$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$