1. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$$
$$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$$
$$=6x^3+x^2-4x-3$$
$$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$$

해설

$$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$$
$$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$$

2. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 45$

해설

$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + a = a - 45 = 0$

$\therefore\ a = 45$

3. $x = 2009,\ y = 7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2 i - x^2 i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

4. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

5. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

6. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

7. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14　② -12　③ -10　④ -8　⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

8. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

9. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$\begin{cases} 2x+y+z=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$

$\therefore\ x+y+z=5 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉠ − ㉣ 에서 $x=7$

㉡ − ㉣ 에서 $y=-2$

㉢ − ㉣ 에서 $z=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-2,\ c=0$

$\therefore\ abc=0$

10. 연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 의 해를

$x=\alpha$,$y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x+1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5$, $2x^2+2x-4=0$,

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

$x=1$일 때, $y=2$,

$x=-2$일 때, $y=-1$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2$ 또는 $\alpha=-2,\ \beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$

11. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

12. k의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k+2)y - (k^2 - 4)z = 28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x + y + z$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$

$\therefore\ 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$

$z = 2x,\ y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$에 대입하면

$x = 2,\ y = -6,\ z = 4$

$\therefore\ 3x + y + z = 4$

13. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x+2)Q_1(x)+3 \\ &= (x+1)(x-1)Q_2(x) \end{aligned}$$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore \ abc=9$

14. $\dfrac{1999^3-1}{1999\times 2000+1}$ 을 계산하면?

① 1920 ② 1909 ③ 1998 ④ 1892 ⑤ 2000

해설

$x=1999$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\frac{1999^3-1}{1999\times 2000+1} &= \frac{x^3-1}{x(x+1)+1}\\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\\ &= x-1\\ &= 1998\end{aligned}$$

15. $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

위 식에 따라 $a^2+b^2+c^2+6=16$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=10$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\times(10-3)+3\times1$

$=31$

16. 다음을 계산하여라.

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** i

해설

$$\begin{aligned}
&1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006} \\
&= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots \\
&\quad \cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006}) \\
&= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) \\
&\quad + \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1) \\
&= i
\end{aligned}$$

17. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

18. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ± 2

해설

(i) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(i), (ii)에서 $x = \pm 1$

19. $x^2+ax+b=0$, $x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0$,
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0$, $1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=-4$
$\therefore ab=12$

20. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 x 축에 접할 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$y - (-3) = -x^2 - 4x + k$
$y = -x^2 - 4x + k - 3$
$\therefore\ y = -(x+2)^2 + k + 1$
이 그래프가 x 축에 접하려면
꼭지점의 y 좌표가 0 이어야 하므로 $k + 1 = 0$
$\therefore\ k = -1$

21. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 모두 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 :

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0$ 또는 1

(ii) $x = 2y$ 일 때 :

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0$ 또는 $-\dfrac{1}{3}$

$\therefore (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

22. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$x^2+(m+2)x-4=0$, $x^2+(m+4)x-6=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0$ $\therefore$ $\alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore$ $m=1$

$\therefore$ $m+\alpha=2$

23. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때 $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

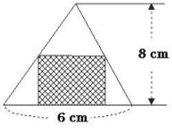
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로
$\alpha+\beta+\alpha\beta=2a+1$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=2$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a+b=2a+1$ $\cdots\cdots$ ㉢
$ab=2$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣를 연립하여 풀면
$a=1$, $b=2$ 또는 $a=-2$, $b=-1$

24. 철민이는 그림과 같이 밑변의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$, 높이가 $8\,\mathrm{cm}$ 인 삼각형 모양의 나무 판자를 가지고 있다. 이 판자를 그림과 같이 잘라 넓이가 $12\,\mathrm{cm}^2$ 인 직사각형 모양의 판자를 만들려고 한다. 이 때, 이 판자의 가로의 길이를 구하여 라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $3\,\mathrm{cm}$

해설

삼각형에 내접하는 직사각형의 가로를 α , 세로를 β 라 하자.
닮음 조건에 의해 $\alpha : 8-\beta = 3 : 4$
$\Rightarrow \quad 3\beta = 24 - 4\alpha,$
넓이가 12 이므로 $\alpha\beta = 12$
$\therefore \;\; \alpha\beta = \alpha(8 - \frac{4}{3}\alpha) = 12, \;\; (\alpha - 3)^2 = 0$
$\therefore \;\; \alpha = 3$

25. x, y 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\ &= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\ &= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3,\ y = -2$ 일 때, 최솟값 -5