1. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

2. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \ (1 \le x \le 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 −5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$에서 최댓값 4

$x = 5$에서 최솟값 −5

3. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5 (2 \le x \le 5)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, ab의 값을 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.
꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x = 2$일 때 $y = 2\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$

$x = 5$일 때 $y = 2\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 25$

따라서 최댓값 $a = 25$이고, 최솟값 $b = 1$이므로 $ab = 25$

4. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

5. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$x^4 = 16$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서
$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$
$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

8. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ −3 ⑤ −5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

9. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $f(1) = f(3) = 8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로
이차함수는 $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.
$f(3) = 8$이므로 $x = 3, y = 8$을 대입하면
$a + 5 = 8 \quad \therefore\ a = 3$ 이므로
$f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$
$\therefore\ a + b + c = 8$

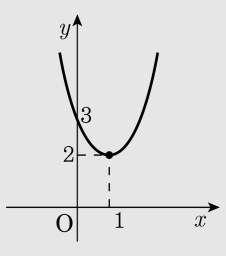
10. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$

④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.
$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위은 $2 < y < 3$



11. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서
$x^2 = t$로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

12. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$　② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$　④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

13. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$ (나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

14. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

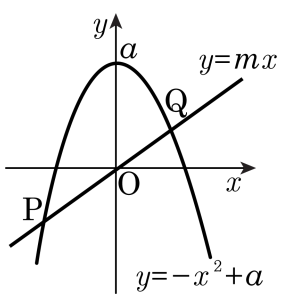
① $1 - \sqrt{2}$, 2　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\ \ \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

15. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$의 그래프와 직선 $y = mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5} - 1$일 때, $a + m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$이므로
방정식 $x^2 + mx - a = 0$의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m = \left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(-\sqrt{5} - 1\right) = -2$

$-a = \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(-\sqrt{5} - 1\right) = -4$
$\therefore a = 4,\ m = 2 \qquad \therefore a + m = 6$

16. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

17. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

$x^2+6x=X$ 로 놓으면

$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

$X(X+8)+15=0,$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore\ X=-3, X=-5$

㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$

$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

18. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$-a=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$
$$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{-2}{1}=-2$$

$\therefore\ a=2$

$$b=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}$$
$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3$$

$\therefore\ b=-3$

$$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

19. $x^2+x+1=0$ 일 때, $x^{100}+x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^{100}}$ 의 값은?

① 1 ② -2 ③ 0 ④ -1 ⑤ 2

해설

$x^2+x+1=0$ 에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^3=1$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x\cdot x^{99}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot x^{99}} \\
&= x+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} \\
&= -1+\frac{x+1}{x^2}(\because x^2+x=-1) \\
&= -1+\frac{-x^2}{x^2}\ (\because x+1=-x^2) \\
&= -2
\end{aligned}
$$

20. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답: cm

▷ 정답: 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

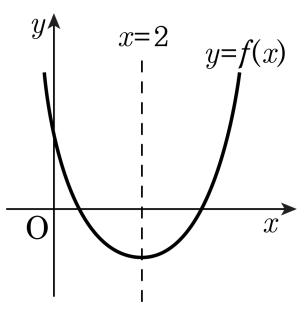
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2$(cm)

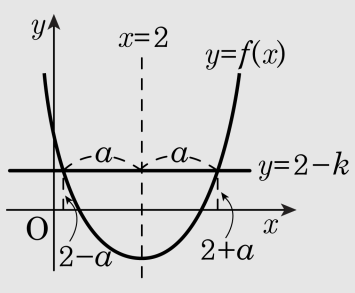
21. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 모든 실근의 합은? (단, $y=f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x))=0$에서 $f(x)=t$로 놓으면
$f(t)=0$을 만족시키는 두 실근은
$t=2-k$ 또는 $f=2+k$
$(0<k<2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x)=2-k$ 또는 $f(x)=2+k$



(i) $f(x)=2-k$를 만족시키는 x의 값은
$y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=2-k$의 교점의 x좌표이므로
$x=2-\alpha$ 또는 $x=2+\alpha$
(ii) $f(x)=2+k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x=2-\beta$ 또는 $x=2+\beta$
따라서 $f(f(x))=0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2-\alpha)+(2+\alpha)+(2-\beta)+(2+\beta)=8$

22. 이차함수 $y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로
$2m$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y - 2m = -(x - m)^2 - 6(x - m) - 3$
즉, $y = -x^2 + 2(m - 3)x - m^2 + 8m - 3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
$\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - m^2 + 8m - 3 > 0$
$2m + 6 > 0$
$\therefore\ m > -3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

23. $x+y=3,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\geq 0,\ y\geq 0$ 이므로

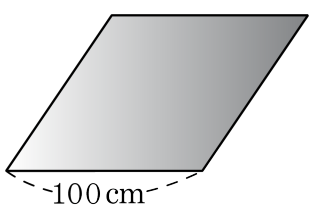
$y=-x+3\geq 0 \ \rightarrow\ -x\geq -3 \ \rightarrow\ x\leq 3 \ \therefore\ 0\leq x\leq 3\ (\because\ x\geq 0)$

또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$

$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M-m=12$

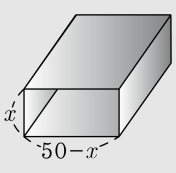
24. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① $695\,\mathrm{cm}^2$ ② $710\,\mathrm{cm}^2$ ③ $625\,\mathrm{cm}^2$

④ $525\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $410\,\mathrm{cm}^2$

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으르 구부리면 단면적 S 는

$S = x(50-x) = -x^2 + 50x$

$= -(x-25)^2 + 625$

$\therefore$ $x = 25$ 일 때, S 의 최댓값은 $625\,\mathrm{cm}^2$

25. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $1 - \sqrt{5}$
④ $2 - \sqrt{5}$ ⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^2 = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하면

$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2,\ 3$

i) $t = 2$ 일 때

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$

ii) $t = 3$ 일 때

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$