1. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

2. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \ (1 \le x \le 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 -5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$에서 최댓값 4

$x = 5$에서 최솟값 -5

3. 이차함수 $y=2x^2-6x+5(2\le x\le 5)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, ab의 값을 구하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$$y=2x^2-6x+5=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+5$$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.

꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x=2$ 일 때 $y=2\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=1$

$x=5$ 일 때 $y=2\left(5-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=25$

따라서 최댓값 $a=25$ 이고, 최솟값 $b=1$ 이므로 $ab=25$

4. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore \ x=-1,1,2$

$\therefore \ -1+1+2=2$

5. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore \ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

8. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ -3 ⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$

$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$

$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$

따라서 $a + b + c = 3$

9. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $f(1) = f(3) = 8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로

이차함수는 $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.

$f(3) = 8$이므로 $x = 3,\ y = 8$을 대입하면

$a + 5 = 8 \quad \therefore\ a = 3$ 이므로

$f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$

$\therefore\ a + b + c = 8$

10. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

① $-2 < y < 3$　　② $-2 < y < 2$　　③ $0 < y < 3$

④ $0 < y < 2$　　⑤ $2 < y < 3$

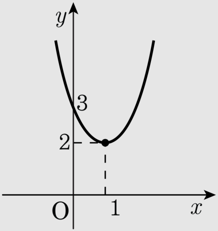
해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.

$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로

함숫값의 범위은 $2 < y < 3$



11. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

12. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

13. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$ (나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$

④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

14. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

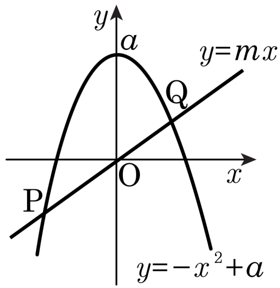
① $1-\sqrt{2}$, 2　　② $-1+\sqrt{2}$, -3　　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

15. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

16. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\dfrac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

17. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

$x^2+6x=X$ 로 놓으면

$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

$X(X+8)+15=0,$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore\ X=-3, X=-5$

㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$

$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

18. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$$-c = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

19. $x^2+x+1=0$일 때, $x^{100}+x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^{100}}$의 값은?

① 1　　② -2　　③ 0　　④ -1　　⑤ 2

해설

$x^2+x+1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^3=1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x\cdot x^{99}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot x^{99}}\\ &= x+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\\ &= -1+\frac{x+1}{x^2}(\because x^2+x=-1)\\ &= -1+\frac{-x^2}{x^2}\ (\because x+1=-x^2)\\ &= -2\end{aligned}$$

20. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

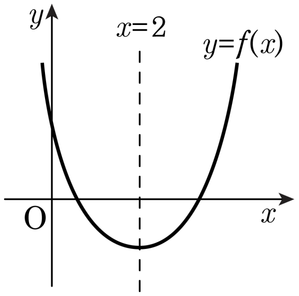
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2$(cm)

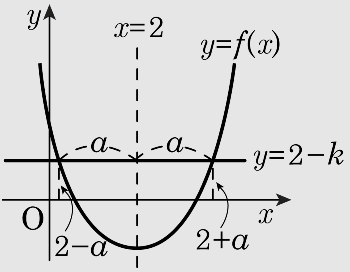
21. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(ⅰ) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ⅱ) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

22. 이차함수 $y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로
$2m$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-2m=-(x-m)^2-6(x-m)-3$
즉, $y=-x^2+2(m-3)x-m^2+8m-3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m^2+8m-3>0$$

$2m+6>0$

$\therefore\ m>-3$

따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

23. $x+y=3,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\ge 0,\ y\ge 0$ 이므로

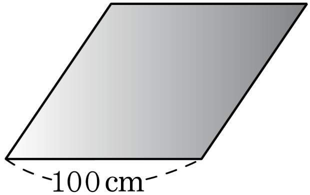
$y=-x+3\ge 0 \ \rightarrow\ -x\ge -3\ \rightarrow\ x\le 3 \therefore\ 0\le x\le 3\ (\because\ x\ge 0)$

또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$

$\therefore\ x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore\ M-m=12$

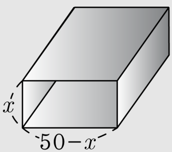
24. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① $695\,\text{cm}^2$ ② $710\,\text{cm}^2$ ③ $625\,\text{cm}^2$

④ $525\,\text{cm}^2$ ⑤ $410\,\text{cm}^2$

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으르 구부리면 단면적 S 는

$$S = x(50-x) = -x^2 + 50x$$
$$= -(x-25)^2 + 625$$

$\therefore$ $x = 25$ 일 때, S 의 최댓값은 $625\,\text{cm}^2$

25. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$　② $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　③ $1 - \sqrt{5}$
④ $2 - \sqrt{5}$　⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = t$ 라 하면

$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2,\ 3$

ⅰ) $t = 2$ 일 때

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$

ⅱ) $t = 3$ 일 때

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$