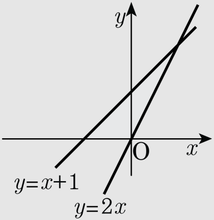
1. 기울기가 각각 1, 2 인 두 직선이 한 점 (1, 2) 에서 만날 때, 두 직선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

기울기가 1, 2 인 두 직선은 $y = x + a$, $y = 2x + b$ 로 놓을 수 있고,
이 두 직선이 (1, 2) 를 지나므로 $a = 1$, $b = 0$
따라서 두 직선은 다음 그림과 같고 넓이 S 는



$\therefore\ S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

2. 기울기가 2 이고 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ 5 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 6

해설

기울기가 2 이고 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=2(x-2)$, $\therefore y=2x-3 \cdots$ ㉠

㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$0=2x-3$, $\therefore x=\frac{3}{2}$ 이므로

x 축과 만나는 점 A 의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

㉠의 y 절편이 -3 이므로 y 축과 만나는 점 B 는 $\mathrm{B}(0,\ -3)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-\frac{3}{2})^2+(-3-0)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

3. 점 (0, 2) 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 $30°$ 인 직선의 방정식은?

① $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ ② $y = x + 2$ ③ $y = 2x + 2$

④ $y = x + 3$ ⑤ $y = x + 4$

해설

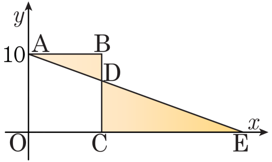
기울기 $m = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

점 (0, 2) 를 지나므로,

$$y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$$

$$\therefore\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$$

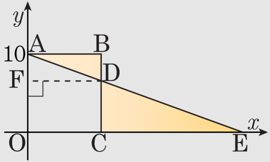
4. 다음 그림과 같은 정사각형 OABC 가 있다. 변 BC 위의 B, C 가 아닌 한 점 D 를 지나는 직선 AD 를 그을 때, 색칠된 부분의 넓이가 사다리꼴 OADC 의 넓이와 같다면 직선 AD 의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

다음 그림과 같이 점 D 에서 y 축에 내린 수선의 발을 F 라 하면



$\triangle ADB = \triangle AFD$ 이므로

$\square OCDF = \triangle DCE$

즉, $\overline{OC} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{CD}$

$\therefore \ \overline{CE} = 2\overline{OC}$

E(30, 0) 이므로 직선 AD 의 기울기는 $-\frac{1}{3}$

5. 두 이차함수 $y=-x^2+3$과 $y=x^2-4x+3$의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x절편은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$y=-x^2+3$ 의 꼭지점은 $\mathrm{A}(0,3)$ 이고,
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 꼭지점은 $\mathrm{B}(2,-1)$ 이다.
이 때, 두 점 $\mathrm{A}(0,3)$,$\mathrm{B}(2,-1)$을 지나는
직선의 방정식은 $y=-2x+3$
따라서, x절편은 $0=-2x+3$에서
$x=\frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$이다.

6. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3 = \frac{1}{2}x-4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

7. 어떤 시험 결과, 최저점은 25 점, 최고점은 160 점이었다. 이 점수를 환산식 $y = ax + b$에 의하여 최저점을 10 점, 최고점을 100 점으로 고치려고 한다. 처음의 100 점은 나중의 몇 점으로 환산되겠는가?

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

해설

$25a + b = 10,\ 160a + b = 100$이므로 두 식을 연립한다.

$\Rightarrow\ \ a = \frac{2}{3}\ \ b = -\frac{20}{3}$

$\therefore$ 100 점을 환산하면, $\frac{2}{3} \times 100 - \frac{20}{3} = 60$

8. 직선 l 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 (2, 3)이다. 이 때, 직선 l의 방정식은?

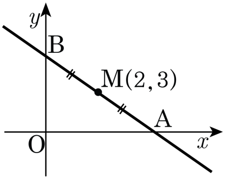
① $y=-2x+2$ ② $y=-\frac{3}{2}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+2$

④ $y=-\frac{3}{2}x+6$ ⑤ $y=\frac{2}{3}x+6$

해설

A, B의 중점이 (2, 3)이므로
A(4, 0), B(0, 6) 직선 l의 x절편이 4 , y 절편이 6 이므로
직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+1$이다.

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}x+6$



9. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

㉠ 점 $(0,5)$를 지나고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 $\rightarrow y=x+5$ ㉡ 두 점 $\mathrm{A}(1,-1)$, $\mathrm{B}(-1,3)$을 지나는 직선 $\rightarrow y=-2x+1$ ㉢ x 절편이 2 , y절편이 -2인 직선 $\rightarrow y=2x-2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

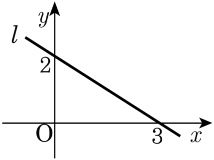
㉠ (기울기)$=\tan 60° = \sqrt{3}$ 이고 y절편이 5이므로 $y=\sqrt{3}x+5$

㉡ $y+1=\dfrac{3-(-1)}{-1-1}(x-1)$, $\therefore\ y=-2x+1$

㉢ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}=1$, $\therefore\ y=x-2$

따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

10. 직선 l의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중이 직선 위의 점은?



① $(0,\ 3)$ ② $(2,\ 0)$

③ $(2,\ 1)$ ④ $(6,\ -2)$

⑤ $(6,\ -1)$

해설

주어진 직선 l 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$, y 절편이 2이므로

직선 l의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+2\cdots$㉠

따라서, ㉠ 을 만족하는 점은 $(6,\ -2)$ 이다.

11. 「m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $\mathrm{P}(m,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
$\boxed{\quad (가) \quad}$ 이다. 따라서 $nx+my=mn\ (0<x<m,\ 0<y<n)$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my=n(m-x)$
좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,
m, n 이 서로소이므로
$\boxed{\quad (나) \quad}$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<\boxed{\quad (다) \quad}$ 에 모순이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① $nx+my=1,\ \ m-x,\ \ m$
② $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
③ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m-x,\ \ m$
④ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
⑤ $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이
각각 m, n 이므로

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \iff nx+my=mn \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

㉠을 만족하는 자연수 x, y 가
존재한다고 가정하면
$my=n(m-x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로
$m-x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<m$ 에 모순이다.

12. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=2$

13. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$y = 0$ 을 대입하면

$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$

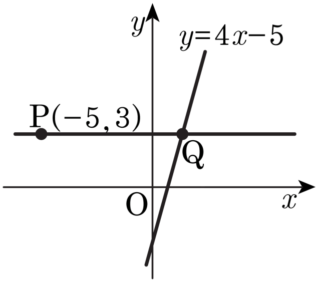
따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 A$(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 B$(0, \frac{5}{2})$,

$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

14. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(-5,3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y=4x-5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는?



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=3$ 이다.
점 Q 의 y좌표가 3이므로
$y=4x-5$에 $y=3$을 대입하면 $3=4x-5$
$\therefore x=2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2-(-5)=7$

15. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \ k = 4$$

16. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$$

$$\Rightarrow \quad a = 7$$

17. 세 점 A(3, a), B(2, 1), C $(a+4,\ 2)$이 일직선 위에있을 때, 실수 a의 값들의 곱은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면
$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$의 기울기는 같다.
$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-a}{2-3}=\frac{2-1}{(a+4)-2},\quad \frac{a-1}{1}=\frac{1}{a+2}$$

$(a-1)\cdot(a+2)=1,\ a^2+a-3=0$

$\therefore$ 실수 a의 값의 곱은 -3

18. $ab < 0$, $bc < 0$일 때, 직선 $ax + by + c = 0$이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제1 사분면 ② 제2, 3 사분면 ③ 제4 사분면

④ 제3 사분면 ⑤ 제3, 4 사분면

해설

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$ab < 0$, $bc < 0$이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

$\therefore$ 제4분면은 지나지 않는다.

19. 세 점 $A(2,\ 2)$, $B(4,\ -3)$, $C(2,\ 3)$에서 점 A를 지나고 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y = 2x + 6$　　② $y = 2x - 6$　　③ $y = -2x + 6$

④ $y = -2x - 6$　　⑤ $y = -x + 6$

해설

중선은 삼각형의 면적을 이등분하므로
BC의 중점 M을 구하면 $(3,\ 0)$이다.
따라서, $A(2,\ 2)$와 $M(3,\ 0)$을 지나는
직선의 방정식을 구하면

$$y - 2 = \frac{0-2}{3-2}(x-2),\ y - 2 = -2(x-2)$$

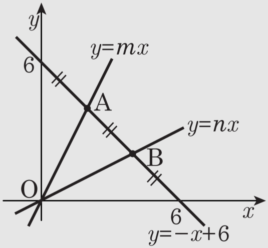
$\therefore\ y = -2x + 6$

20. 직선 $x+y-6=0$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 두 직선 $y=mx,\ y=nx$ 에 의하여 삼등분 될 때, $m+n$ 의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 직선 $y=-x+6$과 두 직선 $y=mx,\ y=nx$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 $(6,\ 0),\ (0,\ 6)$을 잇는 선분을 $2:1$로 내분하는 점이 A이고, $1:2$로 내분하는 점이 B이다.



이 때, 두 점 A, B의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\frac{2\cdot0+1\cdot6}{2+1},\ \frac{2\cdot6+1\cdot0}{2+1}\right),$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{1\cdot0+2\cdot6}{1+2},\ \frac{1\cdot6+2\cdot0}{1+2}\right)$$

$\therefore$ A$(2,\ 4)$, B$(4,\ 2)$

따라서, 직선 $y=mx$는 점 $(2,\ 4)$를 지나고, 직선 $y=nx$는 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$$m=2,\ n=\frac{1}{2}$$

$$\therefore m+n=\frac{5}{2}$$

21. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠,
$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp'+qq'=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의 전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은
$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $D_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\frac{D_2}{4}$는 0이다.

$$\frac{D_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$$

$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

22. 직선 $l_1 : y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 이 $l_2 : y = \frac{2}{b}x - \frac{1}{b}$ 과 수직이고 직선 $l_3 : y = -\frac{1}{b+1}x + \frac{1}{b+1}$ 과 평행하도록 하는 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 17

해설

두 직선 l_1 과 l_2 가 수직이므로 $-\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} = -1$

$\therefore\ ab = 2$

두 직선 l_1 과 l_3 가 평행하므로

$-\frac{1}{a} = -\frac{1}{b+1} \quad \therefore a - b = 1$

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = 1 + 2 \cdot 2 = 5$

23. 직선 $y=-ax+2$가 직선 $y=bx+3$과 수직이고, 직선 $y=(b+3)x-1$과는 평행하다. 이 때, $a+b+ab$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

수직조건에서 $ab=1$이고,
평행조건에서 $a+b=-3$이다.
$\therefore\ a+b+ab=-2$

24. 직선 $ax+y-1=0$이 직선 $2x+by-5=0$에 평행하고, 직선 $x+(a-1)y-3=0$에 수직일 때, $2a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치한다.

$\Rightarrow \quad -a=-\dfrac{2}{b} \quad \cdots$ ㉠

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1이다.

$\Rightarrow \quad -a\times-\dfrac{1}{(a-1)}=-1 \quad \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠,㉡를 연립하면, $a=\dfrac{1}{2} \quad b=4$

$\therefore \quad 2a+b=5$

25. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $2x+(a+2)y-1=0,\ (a-3)x-2y+2=0$이 해를 갖지 않을 때, 상수 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x+(a+2)y-1=0,\ (a-3)x-2y+2=0$이 평행해야 한다.
따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}\neq-\frac{1}{2}$$

$\dfrac{2}{a-3}=\dfrac{a+2}{-2}$에서

$a^2-a-2=0,\ (a-2)(a+1)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-1$

1) $a=2$일 때,

$\dfrac{2}{-1}=\dfrac{4}{-2}\neq-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore$ 평행

2) $a=-1$일 때,

$\dfrac{2}{-4}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore$ 일치

따라서, 1), 2)에 의하여 $a=2$

26. 두 직선 $y = 3x + 2$, $x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1이다.

$$\therefore \quad 3 \times \frac{1}{a} = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

27. 세 직선 $x+2y-3=0$, $3x+y-4-a=0$, $2x-3y-2a=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a=-\frac{3}{5}$ ② $a=-\frac{1}{3}$ ③ $a=-\frac{5}{3}$
④ $a=\frac{5}{3}$ ⑤ $a=5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$x+2y-3=0 \quad \cdots ㉠$

$3x+y-4-a=0 \cdots ㉡$

$2x-3y-2a=0 \quad \cdots ㉢$라하고,

㉡ $\times 3+$ ㉢ $\Leftrightarrow \therefore\ 11x-12-5a=0$

$\therefore\ x=\frac{5a+12}{11}$

㉡ $\times 2-$ ㉢ $\times 3 \Leftrightarrow \therefore\ 11y-8+4a=0$

$\therefore\ y=\frac{-4a+8}{11}$

$\therefore$ ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(\frac{5a+12}{11},\ \frac{-4a+8}{11}\right)$

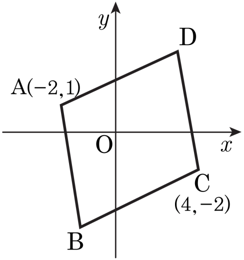
이 점이 ㉠위에 있어야 하므로

$\frac{5a+12}{11}+2\frac{-4a+8}{11}-3=0$

즉, $\frac{5a+12-8a+16}{11}-3=0$

$-3a+28=33,\ 3a=-5 \quad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

28. 좌표평면 위에 마름모 ABCD 가 있다. 두 점 A, C 의 좌표가 각각 $(-2,\ 1)$, $(4,\ -2)$ 일 때, 두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은?



① $y = x - 2$ ② $y = x - \frac{5}{2}$

③ $y = 2x - \frac{3}{2}$ ④ $y = 2x - 2$

⑤ $y = 2x - \frac{5}{2}$

해설

마름모의 두 대각선은 서로를 수직 이등분하므로 $\overline{BD}$ 는 $\overline{AC}$ 와 수직이고 두 점 A, C 의 중점을 지난다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $\frac{1-(-2)}{-2-4} = -\frac{1}{2}$,

중점은 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은

$y = 2(x-1) - \frac{1}{2} = 2x - \frac{5}{2}$

29. 두 점 A(−3, 4), B(1, 2) 를 잇는 선분 AB 의 수직 이등분선의 방정식은?

① $2x-y+5=0$ ② $2x+y-2=0$ ③ $2x+y-1=0$

④ $x-2y+3=0$ ⑤ $x-2y+7=0$

해설

선분 $\overline{AB}$ 의 기울기 $= \dfrac{4-2}{-3-1} = -\dfrac{1}{2}$

선분 $\overline{AB}$ 의 중점 : $\left(\dfrac{-3+1}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right) = (-1,\ 3)$

선분 $\overline{AB}$ 에 수직인 기울기 m 은

$m \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \qquad \therefore\ m=2$

$\therefore\ y = 2\cdot(x+1)+3 \ \rightarrow\ 2x-y+5=0$

30. 두 직선 $x+y=1$과 $3x+2y=1$의 교점을 지나고 직선 $-x+2y=4$에 수직인 직선의 방정식은?

① $2x+y-1=0$ ② $2x+y=0$ ③ $2x+y+1=0$

④ $2x-y+4=0$ ⑤ $2x-y-4=0$

해설

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+2y-1+k(x+y-1)=0$

$(3+k)x+(2+k)y-1-k=0$이

$-x+2y=4$가 수직이려면

$-(3+k)+2(2+k)=0$

$\therefore\ k=-1$

$\therefore\ 2x+y=0$

31. 두 직선 $2x-y+3=0, x-2y+2=0$의 교점과 점 $(-3,0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x+5y+3=0$　　② $-x+5y-3=0$

③ $2x+5y+6=0$　　④ $-x+3y-3=0$

⑤ $x+3y+3=0$

해설

$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 2-2y+2=0 \end{cases}$ 의 연립방정식을 풀면

$x=-\dfrac{4}{3}$　$y=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$　$\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, $(-3,0)$을 지나는 직선

$$y=\left(\frac{0+\frac{1}{3}}{-3+\frac{4}{3}}\right)(x+3)$$

$\therefore$ $5y-x-3=0$

32. 두 직선 $y=x$, $y=0$과 정점 A(3, 1)을 지나는 직선으로 둘러싸인 삼각형 면적의 최솟값은?

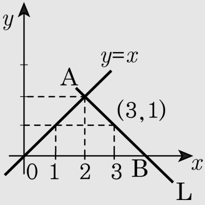
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 A 를 지나는 직선이 $y=x$ 와 수직일 때 △OAB 의 면적은 최소이므로 (2, 2) 인 점에서 교차한다.
따라서 직선 L은 (2, 2)와 (3, 1)을 지나는 직선이다.

$\therefore$ L $= y - x + 4$

$\therefore$ $S = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

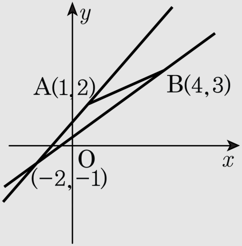


33. 직선 $mx-y+2m-1=0$이 두 점 $A(1,\ 2)$와 $B(4,\ 3)$을 이은 선분 AB와 만나도록 상수 m값을 정할 때, m의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최댓값 : 2, 최솟값 : $\frac{2}{3}$
② 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{1}{3}$
③ 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{2}{3}$
④ 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{1}{3}$
⑤ 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{2}{3}$

해설

$mx-y+2m-1=0$에서
$(x+2)m-y-1=0$이므로
이 직선은 m의 값에 관계없이
항상 점 $(-2,-1)$을 지난다.
따라서 그림과 같이 직선
$mx-y+2m-1=0$의 기울기는
점 A를 지날 때 최대이고 점 B를 지날 때 최소가 된다.



$m\times 1-2+2m-1=0,\ m=1$

$m\times 4-3+2m-1=0,\ m=\frac{2}{3}$

따라서 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{2}{3}$

34. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 그 점의 좌표를 구하면?

① $(6, -5)$ ② $(5, -6)$ ③ $(4, -3)$

④ $(5, -4)$ ⑤ $(-3, 6)$

해설

$(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$

$\Rightarrow \quad (x+2y+4)k-(2x+3y+3)=0$

k에 관계없이 일정한 점을 지나려면

$x+2y+4=0, \quad 2x+3y+3=0$

연립하면 $x=6, \; y=-5$

$\therefore$ 일정한 점은 $(6, -5)$

35. 세 점 $A(3,\ 0)$, $B(0, 4)$, $C(-1,\ 2)$ 에 대하여 점C 에서 직선AB 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{CH}$ 의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

해설

직선 AB 의 방정식은 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$ 이다.

$\therefore\ 4x+3y-12=0$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}}=\frac{|4\times(-1)+3\times 2-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-4+6-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$

36. 세 점 $A(1,2)$, $B(-2,3)$, $C(3,-1)$ 에서 직선$l: 3x+4y-1=0$ 까지의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3 라 할 때, d_1, d_2, d_3 의 크기를 바르게 비교한 것은?

① $d_1 < d_2 < d_3$ ② $d_1 < d_3 < d_2$ ③ $d_2 < d_3 < d_1$

④ $d_3 < d_2 < d_1$ ⑤ $d_3 < d_1 < d_2$

해설

$$d_1 = \frac{|3\times 1 + 4\times 2 - 1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$d_2 = \frac{|3\times(-2) + 4\times 3 - 1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-6+12-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$d_3 = \frac{|3\times 3 + 4\times(-1) - 1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|9-4-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}$$ 에서

따라서 $d_3 < d_2 < d_1$

37. $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같은 x 축 위의 점의 좌표를 구하면?

① $(-2,\ 0),\ \left(\frac{4}{3},\ 0\right)$ ② $(-2,0),\ (2,0)$

③ $(0,-2),\ \left(0,\frac{4}{3}\right)$ ④ $(0,-2),(0,2)$

⑤ $(-2,0),(0,0)$

해설

x 축 위의 점을 $(\alpha,0)$ 이라 하자.
점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|\alpha-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2\alpha-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow\quad |\alpha-3|=|2\alpha-1|$$

$$\Rightarrow\quad (\alpha-3)^2=(2\alpha-1)^2$$

$$\Rightarrow\quad 3\alpha^2+2\alpha-8=0$$

$\alpha=\frac{4}{3}$ 또는 -2

$$\therefore\quad \left(\frac{4}{3},0\right),\ (-2,0)$$

38. 두 직선 $3x-4y+1=0, 3x-4y-4=0$사이의 거리를 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

두 직선이 평행하므로,
두 직선 중 한 직선의 임의의 점을 택한 후
나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x-4y+1=0$ 의 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 점과

직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\therefore \frac{\left|3\times 0+(-4)\times \frac{1}{4}-4\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

39. 다음 두 직선 $3x+4y=21$, $3x+4y=11$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=21$ 의 점$(7,0)$

$$\Rightarrow \frac{|7\times 3+0\times 4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

40. 두 직선 $3x+4y+4=0$, $3x+4y+2=0$사이의 거리는 얼마인가?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x+4y+4=0$의 임의의 한점 $(0,\ -1)$과
$3x+4y+2=0$사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot 0+4\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$$

41. 두 직선 $x+y-1=0$, $2x-y+7=0$ 의 교점을 지나고 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

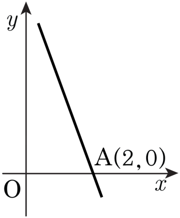
먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2, 3)$
이 점을 지나는 직선의 방정식은
$y = m(x+2)+3$
원점과의 거리를 구하면,

$$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad (2m+3)^2 = 4(m^2+1)$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{5}{12} \quad \cdots \quad \text{기울기}$$

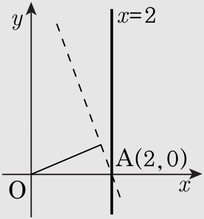
42. 점 $A(2, 0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$　　⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2, 0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x = 2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

43. 세 직선 $x+2y-2=0$, $3x-y-6=0$, $2x-3y+3=0$에 의해서 만들어지는 삼각형의 넓이는?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \cdots ㉠ \\ 3x-y-6=0 \cdots ㉡ \\ 2x-3y+3=0 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠과 ㉡, ㉠과 ㉢, ㉡과 ㉢의 교점을 각각
A, B, C라 하고 교점을 구한다.

(i) ㉠ + ㉡ $\times 2$에서 $x=2, y=0$.

$\therefore \mathrm{A}=(2,0)$

(ii) ㉠ $\times 2-$ ㉢에서 $x=0, y=1$.

$\therefore \mathrm{B}=(0,1)$

(iii) ㉡ $\times 3-$ ㉢에서 $x=3, y=3$.

$\therefore \mathrm{C}=(3,3)$

$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하면,

밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

높이는 A와 ㉢ 사이의 거리이므로

삼각형의 높이는 $\frac{|4-0+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{13}\,\frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7}{2}$

44. 꼭짓점의 좌표가 $A(0,\ 0)$, $B(36,\ 15)$, $C(a,\ b)$인 삼각형 ABC가 있다. a, b가 정수일 때, $\triangle ABC$의 넓이의 최소는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$의 방정식은 $5x - 12y = 0$
$\triangle ABC$의 높이 h는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

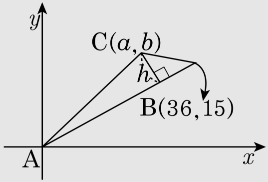
$\triangle ABC$의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$$= \frac{1}{2} 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2}|5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$일 때이다.



45. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

$P(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

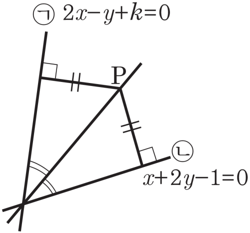
$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

46. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2 ② 4 ③ -6

④ 8 ⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots$ ㉠

$x+2y-1=0 \quad \cdots$ ㉡

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

47. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
P$(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

48. 정점 $A(1, 2)$와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$　② $x-2y+5=0$　③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$　⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{AP}$의 중점을 (X, Y)라 하면

$$X=\frac{1+a}{2},\ Y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

49. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때 점 $\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)$의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x=1$ ② $y=2$ ③ $x+y=2$

④ $x-y=-4$ ⑤ $x+y=0$

해설

$\mathrm{P}(a,\ b)$가 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$b=-a+2\ \cdots$ ㉠

$\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)=(x,\ y)$라 하면,

$a-b=x\ ,\ a+b=y$

$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}\ ,\ b=\dfrac{y-x}{2}$

㉠ 에 대입하면 $\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$

$\therefore y-x=-(x+y)+4$

$\therefore y=2$

50. 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a,\ a+b)$의 자취의 방정식은?

① $y=3x-2$ ② $y=4x-3$ ③ $y=5x-4$

④ $y=6x-5$ ⑤ $y=7x-6$

해설

$x=a \cdots$ ㉠

$y=a+b \cdots$ ㉡ 에서

a, b 를 소거한다.

점 (a, b)가 직선 $2x-y-2=0$ 위를

움직이므로 $2a-b-2=0$

$\therefore b=2a-2$ 이것을 ㉡에 대입하면

$y=3a-2$

$\therefore y=3x-2$ ($\because$ ㉠)