

1. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

- ① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$ ② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$ ④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

2. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}, b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}, b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}, b = 0$ ⑤ $a = 2, b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

3. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x|x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역)이므로
(정의역)=(치역)이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
 $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
 $\therefore k = 2$

4. $\sqrt[3]{9}$ 에 가장 가까운 정수를 x 라 할 때,
 $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}}$ 의 값을 구하여라.

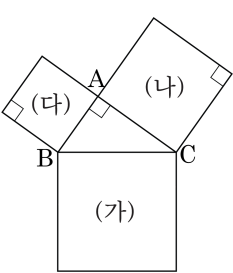
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{27} \text{에서 } x &= 2 \\ \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} &= \sqrt{2 \pm 1} \text{이므로} \\ \text{준식} &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= (3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2}) = 6\end{aligned}$$

5. 다음 그림과 같이 직각 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형 (가), (나), (다)가 있다. (나)의 넓이는 $2 + 3\sqrt{6}$ 이고, (다)의 넓이는 $3 - \sqrt{6}$ 일 때, 선분 $\overline{BC}$ 의 길이는?
- ① $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ ② $\sqrt{6} + 1$
 ③ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
 ⑤ $\sqrt{6} - 1$



해설

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\Rightarrow (\text{다의 넓이}) = (\text{나의 넓이}) + (\text{가의 넓이})$$

$$= 2 + 3\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{BC}^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$BC = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

6. 다음 값을 계산하면?

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}} + \sqrt{11 - 4\sqrt{6}}$$

① $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$

② $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$

③ $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2$

④ $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 2$

⑤ $\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{24}} \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{8} - \sqrt{3}) = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

7. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ 에 대하여 x 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때,
 $x + a - \frac{1}{b}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\&= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times \\ \text{정수 부분 } a &= 1, \text{ 소수 부분 } b = x - a = \sqrt{5} - 2 \\x + a - \frac{1}{b} &= \sqrt{5} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\&= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2\end{aligned}$$

8. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $n < a-b < n+1$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라. (단, n 은 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$

$$n < 0 - \sqrt{2} + 1 < n + 1$$

$$n - 1 < -\sqrt{2} < n$$

$$n - 1 < -1.414 \cdots < n$$

$$\therefore n = -1$$

9. 무리수 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 하면 $\frac{a}{2}-2b$ 의 값은?

- ① $2(1-\sqrt{2})$ ② $-2(1-\sqrt{2})$ ③ $2(1+\sqrt{2})$
④ $3-2\sqrt{2}$ ⑤ $3+2\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1 = 0. \dots$$

정수 부분 $a : 0$, 소수 부분 $b : \sqrt{2}-1$

$$\therefore \frac{a}{2}-2b = -2(\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2} = 2(1-\sqrt{2})$$

10. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y = \frac{x+4}{x+3}$ ② $y = \frac{x+4}{x-3}$ ③ $y = \frac{4x-4}{2x-1}$
④ $y = \frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y = \frac{x+3}{2-x}$

해설

① $y = \frac{x+4}{x+3} = \frac{(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 1$
② $y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{(x-3)+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1$
③ $y = \frac{4x-4}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-2}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1} + 2 = \frac{-1}{x-\frac{1}{2}} + 2$
④ $y = \frac{2x}{2x-1} = \frac{(2x-1)+1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + 1$
⑤ $y = \frac{x+3}{2-x} = \frac{-(2-x)+5}{2-x} = \frac{-5}{x-2} - 1$

11. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \frac{1}{x-m} + 1 + n$ 이 식이

$y = \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로

$m = 2, 1 + n = -1$ 에서 $n = -2$

$\therefore m - n = 4$

12. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{-x-1}{x-1}$

㉡ $y = \frac{x}{x-1}$

㉢ $y = \frac{-2x-1}{x+1}$

① ㉡

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α 만큼,

y 축으로 β 만큼 평행이동시키면

$y = \frac{1}{x-\alpha} + \beta$ 꼴이 된다.

㉠ $y = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{-(x-1)-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1} - 1$

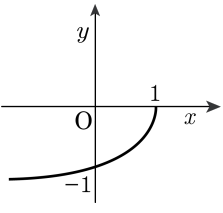
㉡ $y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$

㉢ $y = \frac{-2x-1}{x+1} = \frac{-2(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 2$

따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

13. $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

$$y = -\sqrt{ax+b} + c = -\sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

점(1, 0)에서 시작이므로 $-\frac{b}{a} = 1, c = 0$

$\therefore b = -a, c = 0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$ 이고

주어진 그래프가 점(0, -1)를 지나므로

$$-1 = -\sqrt{-a}$$

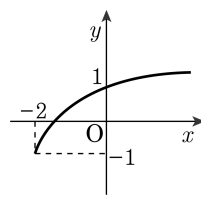
양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$\therefore a = -1$

따라서 $a = -1, b = 1, c = 0$ 이므로

$$a+b+c = -1+1+0 = 0$$

14. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



- ① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
 ③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2}, 0)$
 ⑤ $(-\sqrt{3}, 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프는

함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로

c 만큼 평행 이동시킨 것이므로

$$b = 2, c = -1$$

$$\therefore y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$$

한편, 이 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a\sqrt{0+2} - 1$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$ 의 그래프와

x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

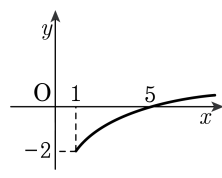
$$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

15. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?



- ① 1 ② -1 ③ 2
 ④ -2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프를 보면

점(1, -2)에서부터 시작하므로

$$-\frac{b}{a} = 1, c = -2$$

$$\therefore -b = a, c = -2$$

$y = \sqrt{ax-a} - 2$ 가 점(5, 0)을 지나므로

$$0 = \sqrt{5a-a} - 2, 2 = \sqrt{4a}$$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = 1 - 1 - 2 = -2$$

16. $\sum_{k=1}^{10} \left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 = 291$$

17. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k 에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2^1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^4}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 12 + 25 + 51 + 102 = 200\end{aligned}$$

18. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\ominus)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\omin�)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\omin�)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\omin�$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.
 $\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$
 $\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$
 $\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$

19. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1) \cdot 2^n$
 $= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots \cdots \textcircled{\text{가}}$
 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변)= (우변)=2
 (ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{\text{가}}$ 이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots \cdots \textcircled{\text{나}}$
 $\textcircled{\text{나}}$ 의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{\text{가}}$ 이 성립한다.
 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{\text{가}}$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$ 라 할

때, $\frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{1024}$ ② $\frac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$
 (ii) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$ 을 대입하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots \cdots \textcircled{\text{나}}$
 $\textcircled{\text{나}}$ 의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$ 을 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \boxed{2(2k+1)}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{\text{가}}$ 이 성립한다.
 (i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{\text{가}}$ 이 성립한다.
 즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$
 $\therefore \frac{g(k)}{f(k)} = 2^k$
 $\therefore \frac{g(10)}{f(10)} = 1024$

20. 양의 정수 n 에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n \{p(n) - 1\}$ ($n = 2, 3, 4, \cdots$) 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때 (좌변) $= p(1) = 1$
(우변) $= 2 \{p(2) - 1\} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$
 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (\ominus)p(k) - k$
 $= (\ominus) \{p(k+1) - \textcircled{\tiny U}\} - k$
 $= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$ 이므로 $n = k+1$ 일 때 성립한다.
따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus, \textcircled{\tiny U}$ 에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① $k, \frac{1}{k}$

② $k, \frac{1}{k+1}$

③ $k+1, \frac{1}{k}$
- ④ $k+1, \frac{1}{k+1}$

⑤ $k+2, \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면
 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$ 이고,
 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k \{p(k) - 1\} + p(k)$
 $= (k+1)p(k) - k$
 $= (k+1) \left\{p(k+1) - \frac{1}{k+1}\right\} - k$
 $= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$
 $\therefore \ominus : k+1, \textcircled{\tiny U} : \frac{1}{k+1}$

21. 세 수 $A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $A > B > C$ ② $B > A > C$ ③ $C > B > A$
④ $A > C > B$ ⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

$$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$$

$$\therefore A > B > C$$

22. 세 수 A, B, C 를
 $A = (10\sqrt{5}$ 의 6제곱근 중 양의 실수)
 $B = (\sqrt{24}$ 의 세제곱근 중 실수),
 $C = (64$ 의 8제곱근 중 양의 실수)
로 정의할 때, 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 차례로 쓰면?

- ① A, B ② A, C ③ B, A ④ B, C ⑤ C, B

해설

$A = \sqrt[6]{\sqrt{500}} = 500^{\frac{1}{12}}$,
 $B = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \left\{(24)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = 24^{\frac{1}{6}} = (24^2)^{\frac{1}{12}} = 576^{\frac{1}{12}}$
 $C = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9} = 512^{\frac{1}{12}}$ 이므로
 $A = 500^{\frac{1}{12}}, B = 576^{\frac{1}{12}}, C = 512^{\frac{1}{12}}$
이때, $500 < 512 < 576$ 이므로
 $A < C < B$
따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수는 차례로 B, A 이다.

23. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

- ① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$
④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$
 $B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$
 $C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$
 $C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로
 $\therefore C < A < B$

24. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$$

$$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$$

$$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$$

$$(a+10b)(a-12b) = 0$$

$$\therefore a = -10b \text{ 또는 } a = 12b$$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로

$$a > 0, b > 0$$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

25. 서로 다른 세 양수 a, b, c 에 대하여 $\log_a b = \sin x, \log_a c = \cos x$ 일 때,

$b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$$\log_a b = \sin x \text{에서 } b = a^{\sin x}$$

$$\log_a c = \cos x \text{에서 } c = a^{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a \end{aligned}$$

26. $2x = \log_7 2$ 일 때, $\frac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

$$2x = \log_7 2 \text{ 에서 } 7^{2x} = 2$$

$$\text{따라서 } \frac{7^{3x} + 7^{-3x}}{7^x + 7^{-x}} = \frac{(7^{3x} + 7^{-3x}) \times 7^{3x}}{(7^x + 7^{-x}) \times 7^{3x}}$$

$$= \frac{7^{6x} + 1}{7^{4x} + 7^{2x}} = \frac{(7^{2x})^3 + 1}{(7^{2x})^2 + 7^{2x}}$$

$$= \frac{2^3 + 1}{2^2 + 2} = \frac{3}{2}$$

27. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a \sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$$\log a \sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log a$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2} \log a < \frac{3}{2} \times 3$$

$$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$$

28. $\log 4.02 = 0.6042$ 일 때, $\log 4020^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36, 0.042

해설

$$\begin{aligned}\log 4020^{10} &= 10 \log 4020 \\ &= 10 \log (4.02 \times 1000) \\ &= 10(\log 4.02 + \log 1000) \\ &= 10(0.6042 + 3) \\ &= 10 \times 3.6042 = 36.042\end{aligned}$$

29. $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34, 0.969

해설

$$\begin{aligned}\log 3140^{10} &= 10 \log 3140 \\ &= 10 \log (3.14 \times 1000) \\ &= 10(\log 3.14 + \log 1000) \\ &= 10(0.4969 + 3) \\ &= 10 \times 3.4969 = 34.969\end{aligned}$$

30. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 알맞은 수를 나열한 것은?

$\log 5$, (가), (나), (다), $\log 80$, ...

- ① $1, \log 20, \log 40$
- ② $\log 15, \log 20, \log 40$
- ③ $\log 20, \log 40, \log 50$
- ④ $\log 27, \log 45, \log 50$
- ⑤ $\log 27, \log 45, \log 52$

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 제 n 항을 a_n 이라고 하면
첫째항이 $\log 5$, 제 5항이 $\log 80$ 이므로

$a = \log 5 \cdots \textcircled{1}$

$a_5 = \log 80$ 에서 $a + 4d = \log 80 \cdots \textcircled{2}$

①을 ②에 대입하면

$4d = \log 80 - \log 5 = \log \frac{80}{5}$

$= \log 16 = 4 \log 2$

$\therefore d = \log 2$

$\therefore a_2 = a + d = \log 5 + \log 2 = \log 10$

$a_3 = a_2 + d = \log 10 + \log 2 = \log 20$

$a_4 = a_3 + d = \log 20 + \log 2 = \log 40$

31. $\sum_{k=1}^{100} [\log_5 k]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 150

② 161

③ 172

④ 183

⑤ 193

해설

$\log_5 1 = 0$, $\log_5 5 = 2$, $\log_5 125 = 3$ 이므로

$[\log_5 1] + [\log_5 2] + [\log_5 3] + [\log_5 4] = 0$

$[\log_5 5] + [\log_5 6] + \cdots + [\log_5 24] = 1 \times 20$

$[\log_5 25] + [\log_5 26] + \cdots + [\log_5 100] = 2 \times 76$

$\sum_{k=1}^{100} [\log_5 k] = 1 \times 20 + 2 \times 76 = 172$

32. 네 수 $1, a, b, c$ 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

$a = r, b = r^2, c = r^3$ 이므로
 $\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$
 $\log_a b = \log_r r^2 = 2$
따라서, $\log_8 c = \log_a b$ 에서
 $\log_2 r = 2$
 $\therefore r = 2^2 = 4$

33. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 $a_{n+1} - a_n = \log \frac{b_n}{b_{n+1}}$ 을 만족할 때, a_{100} 의 값과 같은 것은? (단, $a_1 = 0$)

- ① $\log \frac{b_{101}}{b_1}$ ② $\log \frac{b_{101}}{b_2}$ ③ $\log \frac{b_1}{b_{100}}$
 ④ $\log \frac{b_1}{b_{101}}$ ⑤ $\log \frac{b_2}{b_{101}}$

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이 $\left\{ \log \frac{b_n}{b_{n+1}} \right\}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_1 + \sum_{k=1}^{99} \log \frac{b_k}{b_{k+1}} \\ &= \log \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_3} \cdots \frac{b_{99}}{b_{100}} \\ &= \log \frac{b_1}{b_{100}} \end{aligned}$$

34. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log(2^x + 1) = \log 3 + \log(2^x + 7)$$

$$\log(2^x + 1)^2 = \log 3(2^x + 7) \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3(2^x + 7)$$

$$2^x = t \text{로 치환하면, } (t + 1)^2 = 3(t + 7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$$

$$(t + 4)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 (\because t > 0)$$

$$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

35. 다음 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

$$\log \frac{3}{1}, \log \frac{5}{3}, \log \frac{7}{5}, \log \frac{9}{7} \cdots$$

- ① $\log(2n-1)$

② $\log 2n$

③ $\log(2n+1)$

④ $\log(2n+2)$

⑤ $\log(2n+3)$

해설

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하고 구하는 합을 S_n 이라고 하면

$a_k = \log \frac{2k+1}{2k-1} = \log(2k+1) - \log(2k-1)$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{ \log(2k+1) - \log(2k-1) \} \\ &= (\log 3 - \log 1) + (\log 5 - \log 3) + (\log 7 - \log 5) + \cdots + \\ &\quad \{ \log(2n+1) - \log(2n-1) \} \\ &= -\log 1 + \log(2n+1) = \log(2n+1) \end{aligned}$$

36. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \end{aligned}$$

- ① $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ② $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$
- ③ $\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c|$
- ④ $a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2$
- ⑤ $a + b + c \geq 3^3 \sqrt{abc}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0 \text{ 이므로} \\ & a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \\ & \text{③의 경우 양변을 제곱하여 빼면} \\ & 3(a^2 + b^2 + c^2) - |a + b + c|^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \\ & \therefore \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c| \end{aligned}$$

37. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2$ 와 $xy + yz + zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2} \{ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \} \\ &= \frac{1}{2} (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} ([가]) 0 \text{ 이므로} \\ & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)} \end{aligned}$$

- ① $<, x = y = z$

② $\leq, x = y = z$

③ $\geq, x = y = z$

④ $<, xy = yz = zx$

⑤ $\leq, xy = yz = zx$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2} \{ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0 \text{ 이므로} \\ & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (단, 등호는 } x = y = z \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

38. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$$

$$|-1| - |1| \geq |-2|$$

$$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

39. $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2007}$ ② $\frac{1}{2008}$ ③ $\frac{1}{2009}$ ④ $\frac{1}{4017}$ ⑤ $\frac{1}{4018}$

해설

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ 에서}$$

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

40. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

41. 실수 x 를 입력하면 실수 $\frac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\frac{2}{3}$ 를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$$

에서

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_2(-1) = \frac{2}{3}$$
$$f_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_4(-1) = \frac{2}{3} \cdots$$

따라서 $f_{1999}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

42. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

43. $x+y=\frac{y+z}{8}=\frac{z+x}{5}$ 일 때, $\frac{5x^2-4y^2+z^2}{xy+3yz-2zx}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{25}{46}$

③ 2

④ $\frac{12}{23}$

⑤ $\frac{13}{23}$

해설

$x+y=\frac{y+z}{8}=\frac{z+x}{5}=k$ 라고 하면,

$$\begin{cases} x+y=k \\ y+z=8k \\ z+x=5k \end{cases}$$

세 식을 각 변끼리 모두 더하면, $x+y+z=7k$

$\therefore x=-k, y=2k, z=6k$

$$\frac{5x^2-4y^2+z^2}{xy+3yz-2zx}=\frac{5k^2-16k^2+36k^2}{-2k^2+36k^2+12k^2}=\frac{25}{46}$$

44. $3x = 4y = 2z$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$ 의 값은? (단, $xyz \neq 0$)

- ① $-\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{11}$ ③ $-\frac{43}{11}$ ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ 2

해설

$3x = 4y = 2z = k$ 라 놓는다.

$x = \frac{k}{3}, y = \frac{k}{4}, z = \frac{k}{2}$ 를 주어진 식에 대입한다.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2} &= \frac{\frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{4}}{\frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{64 - 36 + 144}{64 + 36 - 144} \\ &= \frac{172}{-44} = -\frac{43}{11}\end{aligned}$$

45. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x(x+1)}}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}}$

의 값을 구하면?

① $3 + \sqrt{15}$

② $4 - \sqrt{15}$

③ $\sqrt{3} + 1$

④ $5 - \sqrt{3}$

⑤ $6 + \sqrt{15}$

해설

$$\sqrt{2x+1 \pm 2\sqrt{x(x+1)}} = \sqrt{x+1} \pm \sqrt{x} \text{ (복호동순)}$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{3} + 1$$

46. $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때,

$\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2\sqrt{x^2(1-x^2)}} + \sqrt{1+2\sqrt{x^2(1-x^2)}} \\ &= \sqrt{x^2} - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} \\ & \left(\because x^2 = \frac{2}{3} > 1-x^2 = \frac{1}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{x^2} = 2x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

47. $x = \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ ② $-(\sqrt{3}+1)$ ③ $\sqrt{3}+1$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\sqrt{(x+1) \pm 2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \pm 1 (\because x > 1)$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \end{aligned}$$

48. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$
 $a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$
 $\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$
 a, k 가 정수이므로
 $3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, \quad k = 6$

49. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분이 a , 소수 부분이 b 라 할 때, $\frac{1}{b}-a$ 의 값을 구하면?

㉠ $1+\sqrt{3}$

㉡ $2+\sqrt{3}$

㉢ $2-\sqrt{3}$

㉣ $3+\sqrt{3}$

㉤ $3-\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=3-\sqrt{3}$$

따라서 $a=1$, $b=2-\sqrt{3}(\because 1<\sqrt{3}<2)$

$$\therefore \frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=1+\sqrt{3}$$

50. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 의 소수 부분 x 에 대하여 $y = x + \frac{1}{x}$ 일 때, $\sqrt{x(y-2)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}-1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{11-6\sqrt{2}} &= \sqrt{11-2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2} \\ &= 3-\sqrt{2} \\ &= 1. \dots \Rightarrow \text{소수부분 } x : 2-\sqrt{2} \\ y = x + \frac{1}{x} &= 2-\sqrt{2} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} \\ &= 2-\sqrt{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ &= 3-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y-2 &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{x(y-2)} &= \sqrt{(2-\sqrt{2})\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

51. m 이 유리수일 때, $\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$ 가 유리수가 되도록 하는 m 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} \cdot \sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$$\therefore m^2-5m+6=0 \quad \therefore m=2, 3$$

52. $2 + \sqrt{3} = \sqrt{a + b\sqrt{3}}$ (a, b 는 유리수) 일 때, $a - b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$2 + \sqrt{3} = \sqrt{a + b\sqrt{3}}$$

양변을 제곱하면

$$4 + 3 + 4\sqrt{3} = a + b\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 7, b = 4 \quad \therefore a - b = 7 - 4 = 3$$

53. x, y 가 유리수이고, 등식 $x^2 + \sqrt{3}y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y - 3 - 3\sqrt{3} = 0$ 이 성립할 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

주어진 등식을 $\sqrt{3}$ 에 대하여 정리하면
 $(x^2 - 2x - 3) + (y^2 + 2y - 3)\sqrt{3} = 0$
여기서, $x^2 - 2x - 3, y^2 + 2y - 3$ 이 모두 유리수이고 $\sqrt{3}$ 이 무리수이므로
 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 이고, $y^2 + 2y - 3 = 0$
즉, $(x - 3)(x + 1) = 0$ 이고 $(y + 3)(y - 1) = 0$
 $\therefore x = 3$ 또는 $x = -1$ 이고 $y = -3$ 또는 $y = 1$
따라서, 구하는 x, y 의 쌍은
 $(x, y) = (3, 1), (3, -3), (-1, 1), (-1, -3)$

54. 일차 이상의 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ 을 $3x - 1$ 로 나눈 나머지를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 $\frac{p}{4} - \frac{1}{q} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ (p, q 는 자연수)로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$f(x)$ 를 $3x - 1$ 로 나눈 나머지는

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right)$$

$$= \frac{3}{2} \times 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 15 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{59}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$\therefore p + q = 59 + 4 = 63$$

55. 자연수 k 에 대하여 수열 $2^3 + 1, 2^4 + 3, 2^5 + 5, \dots, 2^k + 19$ 의 합을 S 라 할 때, $S + k$ 의 값은?

① $2^{12} + 92$

② $2^{12} + 108$

③ $2^{13} + 92$

④ $2^{13} + 104$

⑤ $2^{13} + 128$

해설

수열 $1, 3, 5, 7, \dots$ 의 제 n 항은 $2n - 1$ 이므로

$$2n - 1 = 19, 2n = 20, \therefore n = 10$$

이때, $k = 12$ 이므로

$$S = (2^3 + 1) + (2^4 + 3) + (2^5 + 5) + \dots + (2^{12} + 19)$$

$$= (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}) + (1 + 3 + 5 + \dots + 19)$$

$$= \frac{2^3(2^{10} - 1)}{2 - 1} + \frac{10(1 + 19)}{2}$$

$$= 2^{13} - 8 + 100 = 2^{13} + 92$$

$$\therefore S + k = 2^{13} + 92 + 12 = 2^{13} + 104$$

56. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

57. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a_2 = -1$
㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$
㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 에서 $n = 1$ 을 대입하면
 $2\sum_{k=1}^1 a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$
즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$
 $\therefore a_2 = \frac{4a_1 + 1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ (참)
㉡ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots \text{㉠}$
 $2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots \text{㉡}$
㉡-㉠에서
 $2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $\therefore 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$ (거짓)
㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$
 $= 2(3a_{n+1} - a_n)$
따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다. (참)
따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

58. $a_2 = 3a_1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_8 = 243$ 일 때, a_{15} 의 값은?

- ① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \text{에서}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_1 \cdot 3^{k-1}$$

$$= a_1 + 2a_1 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$= a_1 + 2a_1 \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

$$a_8 = a_1 \cdot 3^7 = 243 = 3^5 \text{에서 } a_1 = 3^{-2}$$

$$\therefore a_{15} = 3^{-2} \cdot 3^{14} = 3^{12}$$

59. $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n \geq 1$)으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

① $2^{10} + 6$

② $2^{10} + 0$

③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$

⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$ 꼴로 변형하면

$$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$ 이고 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10 \\ &= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18 \end{aligned}$$

60. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 2, \\ 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n &= 0 \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$$\begin{aligned} 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n &= 0 \\ 2(a_{n+2} - a_{n+1}) &= a_{n+1} - a_n \\ a_{n+1} - a_n &= b_n \text{이라 하면} \\ 2b_{n+1} &= b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_1 &= a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1 \\ \therefore \{b_n\} \text{은 초항이 } 1 \text{이고} \\ &\text{공비가 } \frac{1}{2} \text{인 등비수열} \\ \therefore b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ a_2 - a_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ a_3 - a_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &\vdots \\ + \underbrace{a_n - a_{n-1}}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \\ a_n - a_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ a_n &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \\ &= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1} \\ a_n &= 3 - 2^{-n+2} \\ a_{50} &= 3 - 2^{-48} \\ p = 3, \quad q = -48 \quad \therefore p + q &= -45 \end{aligned}$$

61. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
 이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

62. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$ 는 점 $P_n(a_n)$ 과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$ 을 연결하는 선분 P_nP_{n+1} 을 $2:3$ 으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$ 일 때, 점 P_n 의 좌표 a_n 은?

- ① $\frac{25}{8} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$
 ② $\frac{25}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$
- ③ $\frac{25}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$
 ④ $\frac{25}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}$
- ⑤ $\frac{25}{8} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + 3a_n}{2+3} = \frac{2}{5}a_{n+1} + \frac{3}{5}a_n$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{3}{5}(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{ 이라 하면 } b_{n+1} = -\frac{3}{5}b_n$$

이때, $a_2 = 5$, $a_1 = 0$ 이므로 $b_1 = a_2 - a_1 = 5$

$$\therefore b_n = b_1 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} = 5 \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} 5 \left(-\frac{3}{5} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{5 \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)}$$

$$= \frac{25}{8} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}$$

63. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $2^{4+2} + 3^{1+2} = 91 = 13 \cdot 7$ 로 13의 배수이다

(ii) $n = k$ (k 는 자연수)일 때 성립한다고 가정하면

$$2^{4k+2} + 3^{k+2} = 13m(m \text{은 자연수})$$

$$2^{4(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} = \textcircled{\small{\text{㉠}}} \cdot 2^{4k+2} + \textcircled{\small{\text{㉡}}} \cdot 3^{k+2}$$

$$= \textcircled{\small{\text{㉢}}} \cdot 13m + \textcircled{\small{\text{㉣}}} \cdot 3^{k+2}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $2^{4n+2} + 3^{k+2}$ 은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 의 13의 배수이다.

위

의 증명에서 $\textcircled{\small{\text{㉠}}}$, $\textcircled{\small{\text{㉡}}}$, $\textcircled{\small{\text{㉣}}}$ 에 알맞은 수들의 합은?

① 1

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 8

해설

$$2^{4k+2} + 3^{k+2} = 13m \text{일 때}$$

$$2^{4(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} \text{도 13의 배수가}$$

되는지 확인하는 과정이다.

$$2^4 \cdot 2^{4k+2} + 3 \cdot 3^{k+2}$$

$$= 2^4 \cdot (13m - 3^{k+2}) + 3 \cdot 3^{k+2}$$

$$= 2^4 \cdot 13m - 16 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^{k+2}$$

$$= 2^4 \cdot 13m + (-13) \cdot 3^{k+2}$$

$$\therefore \textcircled{\small{\text{㉠}}} = 16, \textcircled{\small{\text{㉡}}} = 3, \textcircled{\small{\text{㉣}}} = -13$$

$$\therefore \textcircled{\small{\text{㉠}}} + \textcircled{\small{\text{㉡}}} + \textcircled{\small{\text{㉣}}} = 6$$

64. 다음은 n 이 자연수일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{(가)})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{(나)})$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $2k^2 + 7k + 4, 2k + 2$
- ② $2k^2 + 7k + 5, 2k + 2$
- ③ $2k^2 + 7k + 5, 2k + 3$
- ④ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 2$
- ⑤ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 3$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2 + 7k + 6})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

65. 다음은 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 $P(n)$ 으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
□ 이라 놓을 수 있다.
 $7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
 $= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
 $= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
 $= 3(7m' + 4^k)$
.....

- ① $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
② $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
③ $7^n - 4^n$ 은 n 으로 나누어떨어진다.
④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 n 으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
 $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$ 일 때 증명한 것이다.
∴ ①

66. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$\begin{aligned}x^3 &= \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \\&= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) \\&= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) \\&= 2 - \frac{1}{2} - 3x\end{aligned}$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

67. 자연수 n 에 대하여 $x = \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}$ 일 때, $(x + \sqrt{1+x^2})^{2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$\begin{aligned} 1+x^2 &= 1 + \frac{5^{\frac{2}{n}} - 2 - 5^{-\frac{2}{n}}}{4} \\ &= \frac{5^{\frac{2}{n}} + 2 - 5^{-\frac{2}{n}}}{4} = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \right)^2 \\ \therefore (x + \sqrt{1+x^2})^{2n} \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \right)^{2n} = \left(5^{\frac{1}{n}} \right)^{2n} = 5^2 = 25 \end{aligned}$$

68. $f(x) = 2^x$ 일 때, 다음 중 16^{16} 과 같은 것은?

① $f(f(1))$

② $f(f(2))$

③ $f(f(6))$

④ $f(f(10))$

⑤ $f(f(16))$

해설

$$f(x) = 2^x \text{ 에서 } f(6) = 2^6 = 64 \cdots \textcircled{A}$$

$$16^{16} = (2^4)^{16} = 2^{64} = f(64) \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 에 $\textcircled{A}$ 을 대입하면

$$\therefore 16^{16} = f(64) = f(f(6))$$

69. 집합 M 을 $M = \{3a + 5b | a, b \text{는 음이 아닌 정수}\}$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ㉠ $89 \in M, 97 \in M$

㉡ $K \in M \Rightarrow K + 3 \in M$

㉢ 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $89 = 9 + 80 = 3 \times 3 + 5 \times 16 \in M$
 $97 = 27 + 70 = 3 \times 9 + 5 \times 14 \in M$

㉡ $3a + 5b = K$ 라 하면
 $K + 3 = 3(a + 1) + 5b \in M$

㉢ $10 = 3 \times 0 + 5 \times 2$
 $11 = 3 \times 2 + 5 \times 1$
 $12 = 3 \times 4 + 5 \times 0$
 $13 = 3 \times 1 + 5 \times 2$
 $14 = 3 \times 3 + 5 \times 1$
이므로 15이후의 자연수는 $10 + 5 = 15, 11 + 5 = 16, 12 + 5 = 17, 13 + 5 = 18, 14 + 5 = 19 \cdots$ 의 꼴로 표현이 가능하다.
따라서 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

70. 자연수를 원소로 가지는 집합 S 가 조건 ' $x \in S$ 이면 $(4 - x) \in S$ 이다.' 를 만족한다. 이 때, 집합 S 의 개수는?

- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

집합 S 의 원소는 자연수이어야 하므로 x 가 자연수이어야 한다. 또한, 조건 ' $x \in S$ 이면 $(4 - x) \in S$ '로부터 x 가 S 의 원소이면 $(4 - x)$ 도 S 의 원소이므로 $(4 - x)$ 도 자연수이다. $1 \in S$ 이면 $(4 - 1) \in S$, 즉 $3 \in S$, $2 \in S$ 이면 $(4 - 2) \in S$, 즉 $2 \in S$, $3 \in S$ 이면 $(4 - 3) \in S$, 즉 $1 \in S$ 이므로 1과 3은 동시에 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아니어야 한다.

한편, 2는 혼자서 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아닐 수 있다. 따라서 두 집합 $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$ 의 원소들을 동시에 갖거나 갖지 않는 모든 집합들을 보면 S_1 만을 가질 때에는 $\{2\}$, S_2 만을 가질 때에는 $\{1, 3\}$, S_1 , S_2 를 모두 가질 때에는 $\{1, 2, 3\}$ 이다. 따라서 3개이다.

71. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

- $(\heartsuit) 1 \in A$
 $(\spadesuit) a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- $\textcircled{1}$ 집합 A 는 유한집합이다.
- $\textcircled{2}$ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
- $\textcircled{3}$ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

- $\textcircled{1} \textcircled{1}$
- $\textcircled{2} \textcircled{2}$
- $\textcircled{3} \textcircled{3}$
- $\textcircled{4} \textcircled{1}, \textcircled{2}$
- $\textcircled{5} \textcircled{2}, \textcircled{3}$

해설

- $\textcircled{1}$ 조건 $(\heartsuit)$ 에서 $1 \in A$ 이므로 조건 $(\spadesuit)$ 에 의하여
 $\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots$,
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의
원소이므로 A 는 무한집합이다.
- $\textcircled{2}$ $\textcircled{1}$ 에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots$,
즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에
대하여 $2^n \in A$ 이다.
- $\textcircled{3}$ (반례)
집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 $(\heartsuit),$
 $(\spadesuit)$ 를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.
이상에서 옳은 것은 $\textcircled{2}$ 뿐이다.

72. 집합 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 C 의 개수는?

$\supset A = B \cup C$

$\subseteq n(A) = 7$

$\subseteq n(B) = 4$

- ① 32개
- ② 16개
- ③ 8개
- ④ 4개
- ⑤ 2개

해설

집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 라 놓으면 집합 A 의 원소는 7개이고, $A = B \cup C$ 이므로
 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3\}$ 이 때
집합 C 는 x_1, x_2, x_3 을 반드시 원소로 가져야 하므로
 $\{x_1, x_2, x_3\} \subset C \subset A$
집합 C 는 x_1, x_2, x_3 을 포함하는 A 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^{7-3} = 2^4 = 16$ (개)

73. 집합 $S = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 집합 $A = \{xy \mid x \in S, y \in S\}$ 이다. 집합 A 의 부분집합 중 임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 16개

해설

자연수 N 의 약수의 개수가 3 개이면 N 은 소수의 제곱수이다.
 $S = \{2, 3, 5, 7\}$, $A = \{xy \mid x \in S, y \in S\}$ 이고 S 의 원소는 모두 소수이므로,
임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분 집합은 $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} = \{4, 9, 25, 49\}$ 의 부분집합이다.
따라서 $2^4 = 16$ (개)

74. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 $X \subset A$, $A \cap X^c = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$$A \cap X^c = A - X = \{1, 4\}$$

1, 4는 X 의 원소가 될 수 없다.

그러므로 구하는 집합은 $\{2, 3, 5\}$ 의 진부분집합의 개수와 같다.

$$\therefore 2^3 - 1 = 7(\text{개})$$

75. 두 집합 $A = \{3, 2a - 5, 2a + 1\}$, $B = \{a - 2, a, a + 2\}$ 에 대하여 $A \cap B^c = \{7\}$ 일 때, a 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A = \{3, 2a - 5, 2a + 1\}$, $B = \{a - 2, a, a + 2\}$ 이고
 $A \cap B^c = A - B = \{7\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 7이 반드시 있다.
(1) $2a - 5 = 7$ 일 때, $a = 6$ 이고
 $A = \{3, 7, 13\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ 이다.
이때 $A - B \neq \{7\}$ 이므로 성립할 수 없다.
(2) $2a + 1 = 7$ 일 때, $a = 3$ 이고
 $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이다.
이때 $A - B = \{7\}$ 이므로 성립된다.
 $\therefore a = 3$

76. $A = \{1, x, 3\}, B = \{x - 1, 5, 6\}$ 이고 $A - B = \{2, 3\}$ 일 때, $B \cap A^c$ 은?

- ① $\{1, 5\}$ ② $\{1, 6\}$ ③ $\{2, 5\}$ ④ $\{2, 6\}$ ⑤ $\{5, 6\}$

해설

$A - B = \{2, 3\}$ 이므로 $x = 2$ 이다. 따라서 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 5, 6\}$ 이고 $B \cap A^c = B - A = \{5, 6\}$ 이다.

77. 두 집합 $A = \{1, a, a + 2\}$, $B = \{3, a - 2, 2 \times a\}$ 에 대하여 $A - B = \{5\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$a - b = \{5\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

(1) $a = 5$ 일 때, $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{3, 10\}$ 이므로 $A - B = \{1, 5, 7\} \neq \{5\}$ 이다.

(2) $a + 2 = 5$, 즉 $a = 3$ 일 때, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$ 이므로 $A - B = \{5\}$ 이다.

(1), (2) 에서 $a = 3$ 이다.

78. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각 $A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\}$,
 $B = \{x|x \text{는 두 자리 자연수}\}$ 일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$B = \{x|x \text{는 두 자리 자연수}\} = \{10, 11, 12, 13, \dots\}$$

$$(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ 이므로}$$

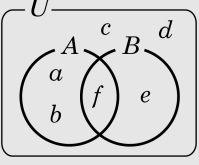
$$n(A^c \cup B)^c = 7$$

79. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{a, b\}, B - A = \{e\}, A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 A^c 은?

- ① $\{b\}$
- ② $\{e\}$
- ③ $\{b, e\}$
- ④ $\{c, d\}$
- ⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



80. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3\}, B - A = \{5\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $A \cap B$ 는?

① $\{1\}$

② $\{3\}$

③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 5\}$

⑤ $\{1, 5\}$

해설

$A - B = \{3\}, B - A = \{5\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이다.

81. a, b 는 양의 상수이다. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, x > 0, y > 0$ 일 때, $x + y$ 의
최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$

② $4\sqrt{ab}$

③ $a + b + 2\sqrt{ab}$

④ $a + b + 4\sqrt{ab}$

⑤ $ab + 3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로

$$(x+y) \cdot 1 = (x+y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right)$$

$$= a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}}$$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$

82. $x > -1$ 일 때 $x + \frac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 k 라 할 때 $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x+1 > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

$$\therefore m = 1$$

이 때 등호는

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \text{ 에서 } x = 0, -2$$

$x > -1$ 이므로 등호는 $x = 0$ 일 때만 성립한다.

$$\therefore k = 0$$

$$\therefore m+k = 1$$

83. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13

② 24

③ 25

④ 28

⑤ 36

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b) \cdot \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) \geq 12 + 13 = 25$$

84. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A$ ($x = 1, 2, 3$) 이 성립하는 것의 개수는?

① 3 개 ② 5 개 ③ 9 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

$$2x - f(x) \in A \text{ 이면, } x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) \in A$$

$$\therefore f(1) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 - f(2) \in A$$

$$\therefore f(2) = 1, f(2) = 2, f(2) = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 - f(3) \in A$$

$$\therefore f(3) = 3$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

85. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

- ① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

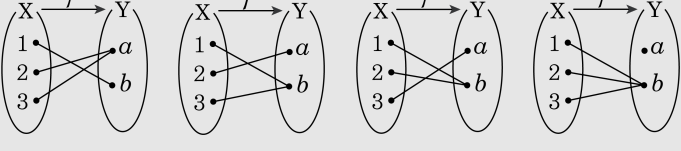
86. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



87. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 이라 하고, $P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \times \frac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_n - 1}$ ($n \geq 2$)라고 할 때, P_{1991} 에 가장 근사한 값은?

- ① 2.0 ② 2.3 ③ 2.6 ④ 2.9 ⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{T_n}{T_n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \approx 2.9$$

88. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?
- ① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
 $= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$
 $= (b-c+c-a+a-b)x$
 $+ (-ab+ac-bc+ab-ca+cb) = 0$
 $\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
 a, b, c 는 서로 다른 수이고
 $f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$
 $f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$
그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고
 $f(a) = f(b) = 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
 $\therefore f(2013) = 0$

89. $\frac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ 를 풀면?

① 6

② 8

③ $\frac{31}{2}$

④ 24

⑤ 512

해설

분자, 분모에 2^3 을 곱하면

$$\frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^3(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4})} = \frac{2^3(2^1 + 2^0 + 2^{-1})}{2^1 + 2^0 + 2^{-1}} \\ = 2^3 = 8$$

해설

$$\frac{2 + 1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{16}} = 8$$

90. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$

③ $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$

④ $\sqrt[3]{2}$

⑤ 1

해설

$a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}, b = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면

$$a^3 + b^3 = 10, ab = -3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$

$a+b = x$ 라고 하면,

$$x^3 + 9x - 10 = 0,$$

$$(x-1)(x^2 + x + 10) = 0$$

$$\therefore x = 1$$

91. 두 실수 a, b 에 대하여 $a + b = \sqrt{7\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $a - b = \sqrt{7\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ 가 성립할 때, $a^2 + ab + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① $4\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{5} + \sqrt{3}$
 ④ $5\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2} \{ (a+b)^2 + (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4} \{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = 5\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

92. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$ 일 때, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ 의 값을 구하면?

- ① 202 ② 204 ③ 206 ④ 208 ⑤ 210

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} &= (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} = x \\ \sqrt{17-12\sqrt{2}} &= \sqrt{17-2\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2} \\ &= 3-2\sqrt{2} = y \\ x^3+x^2y+xy^2+y^3 &= x^2(x+y)+y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2+y^2) \\ \text{각각 } x, y \text{ 를 대입하여 계산한다.} \\ (x+y)(x^2+y^2) &= 34 \times 6 = 204\end{aligned}$$

93. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10} 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = b_n \text{ 이라 하면 } \sum_{k=1}^n b_k = (n+1)^2$$
$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \quad (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \quad (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$

94. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 ka_k$ 의 값은?

- ① 110 ② 125 ③ 145 ④ 160 ⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$ 이므로
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$
 $= 2n + 1 (n = 2, 3, 4, \dots)$
 $n = 1$ 일 때,
 $a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$
따라서
 $a_n = 2n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로
 $\sum_{k=1}^5 ka_k = \sum_{k=1}^5 k(2k + 1)$
 $= \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 k$
 $= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$

95. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2^n$ 을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 25

④ 27

⑤ 30

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2^{5-1} = 16$$

$$\therefore a_9 + a_{10} = 25$$

96. 수열 $\{a_n\}$ 은 처음 12개 항 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 가 서로 다르고 $a_{n+12} = a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시킨다. 이 때, 세 집합
 $A = \{a_{4n+1}, n \text{은 자연수}\}$
 $B = \{a_{5n+2}, n \text{은 자연수}\}$
 $C = \{a_{6n+3}, n \text{은 자연수}\}$
의 원소의 개수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $p+q+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_{n+12} = a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로 12개의 숫자가 반복하여 나타나는 수열이다.

(i) $b_n = a_{4n+1}$ 이라 하면

$\{b_n\} = a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, a_{21}, a_{25}, \dots$

위의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 을 이용하여 다시 쓰면

$\{b_n\} : a_5, a_9, a_1, a_5, a_9, a_1, \dots$ 이므로 $A = \{a_1, a_5, a_9\}$

$\therefore p = n(A) = 3$

(ii) $c_n = a_{5n+2}$ 라 하면

$\{C_n\} : a_7, a_{12}, a_{17}, a_{22}, a_{27}, a_{32}, a_{37}, a_{42}, a_{47},$

$a_{52}, a_{57}, a_{62}, a_{67}, \dots$

이므로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 를 이용하여 다시쓰면

$\{C_n\} = a_7, a_{12}, a_5, a_{10}, a_3, a_8, a_1, a_6, a_{11}, a_4, a_9,$

$a_2, a_7, \dots$

이므로 $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}\}$

$\therefore q = n(B) = 12$

(iii) $d_n = a_{6n+3}$ 이라 하면

$\{d_n\} : a_9, a_{15}, a_{21}, a_{27}, \dots$

위의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 를 이용하여 다시 쓰면

$\{d_n\} : a_9, a_3, a_3, \dots$

이므로 $C = \{a_3, a_9\}$

$\therefore r = n(C) = 2$

이상에서 $p+q+r = 3+12+2 = 17$

97. 수열 $1, 1+2, 1+2+2^2, 1+2+2^2+2^3, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $2^n - n$

② $2^{n+1} - 1$

③ $2^{n+1} - n$

④ $2^{n+1} - n - 1$

⑤ $2^{n+1} - n - 2$

해설

수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

98. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

(가) $a_{4n} = n^2 (n \geq 1)$
(나) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} (n \geq 1)$

- ① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

(나)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4, a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \dots$ 이므로
 $\sum_{k=1}^{40} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40})$
 $= 2a_4 + 2a_8 + 2a_{12} + \dots + 2a_{40}$
 $= 2 \sum_{k=1}^{10} a_{4k} = 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 (\because \text{가})$
 $= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$

99. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

- ① $a_{51} - a_1$
- ② $a_{51} - a_2$
- ③ $a_{51} + a_1$
- ④ $a_{52} - a_2$
- ⑤ $a_{52} + a_2$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$a_1 = a_3 - a_2$

$a_2 = a_4 - a_3$

$\vdots$

+) $\frac{a_{50} = a_{52} - a_{51}}{\sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2}$

100. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이 성립하고 $a_6 = 62$ 라 할 때, $a_1 + a_2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

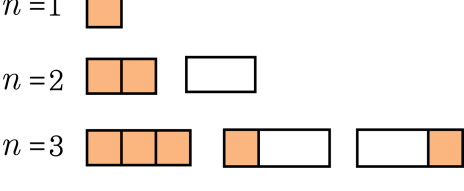
$\therefore 3a_1 + 5a_2 = 62$

a_1, a_2 의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$ 이므로

$a_1 = 4, a_2 = 10$

$\therefore a_1 + a_2 = 14$

101. 가로 길이가 n , 세로 길이가 1인 직사각형을 가로와 세로 길이가 모두 1인 타일과 가로 길이가 2, 세로 길이가 1인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$ 인 경우는 1가지, $n = 2$ 인 경우는 2가지, $n = 3$ 인 경우는 3가지가 존재한다. 가로 길이 n 에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n 이라 할 때, a_{10} 의 값을 구하여라.
(단, n 은 자연수이다.)



▶ 답 : 가_지

▷ 정답 : 89가_지

해설

a_n 은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1인 경우와 2인 경우 2가지가 있으므로
 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 가 성립한다. 그러므로
 $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$
즉, 가로의 길이가 10인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89가지이다.

102. m, n 이 정수일 때, $\frac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

- ① 288 ② 2534 ③ 3042 ④ 5164 ⑤ 7254

해설

$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$ 이고 $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{4}{m}}$

이 수가 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$ 과 $-\frac{4}{m}$ 가 모두 자연수가 되어야 하므로

$n = -1, -2, -3, -6$ 이고 $m = -1, -2, -4$ 이다.

따라서 $\frac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은

$(2^6 + 2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^2 + 3) = 78 \times 93 = 7254$

103. 실수 x 에 대하여 $a = 2^{\sec x}$, $b = 4^{\tan x}$ 라 하자. $a^{-\sin x} = 3$ 일 때, b 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a &= 2^{\sec x} = 2^{\frac{1}{\cos x}} \text{이므로} \\ b &= 4^{\tan x} = 4^{\frac{\sin x}{\cos x}} = 2^{\frac{2\sin x}{\cos x}} = a^{2\sin x} \\ \therefore b &= (a^{\sin x})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

104. 세 종류의 곰팡이 A, B, C 의 수를 조사하였더니 그 개체 수가 A 는 2시간마다 2배로, B 는 3시간마다 3배로 C 는 6시간마다 11배로 증가하였다. 이 조사에서 A, B, C 의 1시간 후의 개체 수는 각각 처음의 a 배, b 배, c 배임을 알 수 있다. 이때, a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $c < a < b$ ⑤ $c < b < a$

해설

1시간 동안 A, B, C 의 수는 각각 처음의 a 배, b 배, c 배만큼 증가하고, A 의 수는 2시간마다 2배로, B 의 수는 3시간마다 3배로, C 의 수는 6시간마다 11배로 증가하므로

$$a^2 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}$$

$$b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}$$

$$c = \sqrt[6]{11} = 11^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore a < b < c$$

105. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$ 를 만족하는 k 의 값들 중 최소인 수를 p 라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b 는 서로소)이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로

$k = 2^{30}, 3^{30}, 4^{30}, \dots$

따라서, k 의 최소값은 2^{30} 이므로 $p = 2^{30}$ 이다.

$$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore a + b = 17$$

106. $10^a = 2$, $10^b = 3$ 일 때, $\log_{15} 10$ 을 a, b 로 나타내면?

① $\frac{1}{a+b+1}$

② $\frac{1}{a-b+1}$

③ $\frac{1}{a+b-1}$

④ $\frac{1}{b-a+1}$

⑤ $\frac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2$, $10^b = 3$ 에서 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$

$$\log_{15} 10 = \frac{1}{\log_{10} 15}$$

$$\text{한편, } \log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$$

$$\therefore \log_{15} 10 = \frac{1}{b-a+1}$$

107. $3^a = 2$, $3^b = 7$ 일 때, $\log_6 84$ 를 a , b 로 나타내면?

- ① $\frac{2a+b+1}{a+1}$ ② $\frac{a+2b+1}{b+1}$ ③ ab
④ $\frac{2a+b-1}{a+1}$ ⑤ $\frac{2a+b-1}{b+1}$

해설

$3^a = 2$ 이므로 $a = \log_3 2$, $3^b = 7$ 이므로 $b = \log_3 7$

$$\therefore \log_6 84 = \frac{\log_3 84}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3 \times 7)}{\log_3 (2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$= \frac{2 \log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1} = \frac{2a + b + 1}{a + 1}$$