1. $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y},\ x \to f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 a, b라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

2. $X = \{x \mid -2 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \le y \le 3\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}$, $b = 0$ ⑤ $a = 2$, $b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = 0$

3. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x|x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이려면,

(정의역)=(공역)이므로

(정의역)=(치역)이 되어야 한다.

즉, $f(k) = k$

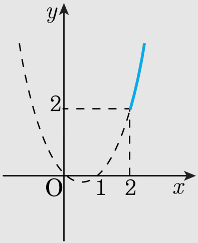
$\therefore$ $k = 0$ 또는 $k = 2$

(ⅰ)$k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로

$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.

(ⅱ)$k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.

$\therefore$ $k = 2$



4. $\sqrt[3]{9}$ 에 가장 가까운 정수를 x 라 할 때,

$\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}}+\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[3]{27}$ 에서 $x=2$

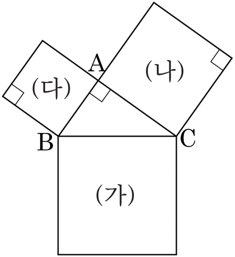
$\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pm1$ 이므로

$$준식 =\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$$

5. 다음 그림과 같이 직각 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형 (가), (나), (다) 가 있다. (나)의 넓이는 $2+3\sqrt{6}$이고, (다)의 넓이는 $3-\sqrt{6}$일 때, 선분 $\overline{BC}$의 길이는?



① $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　② $\sqrt{6}+1$

③ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　　④ $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{6}-1$

해설

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$\Rightarrow$((가)의 넓이) =((다)의 넓이)+((나)의 넓이)

$=2+3\sqrt{6}+3-\sqrt{6}$

$\therefore \overline{BC}^2=5+2\sqrt{6}$

$BC=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

6. 다음 값을 계산하면?

$$\sqrt{8+\sqrt{60}}+\sqrt{11-4\sqrt{6}}$$

① $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$

② $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

③ $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$

④ $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-2$

⑤ $\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2$

해설

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{11-2\sqrt{24}}$$
$$=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{8}-\sqrt{3})=\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$

7. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$에 대하여 x의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $x + a - \dfrac{1}{b}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times$

정수 부분 $a = 1$, 소수 부분 $b = x - a = \sqrt{5} - 2$

$x + a - \dfrac{1}{b} = \sqrt{5} - 1 + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2}$

$= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2$

8. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $n < a-b < n+1$을 만족하는 n의 값을 구하여라. (단, n은 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$

$n < 0-\sqrt{2}+1 < n+1$

$n-1 < -\sqrt{2} < n$

$n-1 < -1.414\cdots < n$

$\therefore\ n = -1$

9. 무리수 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 하면 $\frac{a}{2}-2b$의 값은?

① $2(1-\sqrt{2})$ ② $-2(1-\sqrt{2})$ ③ $2(1+\sqrt{2})$
④ $3-2\sqrt{2}$ ⑤ $3+2\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1=0.\cdots$

정수 부분 a : 0, 소수 부분 b : $\sqrt{2}-1$

$\therefore \frac{a}{2}-2b=-2(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}=2(1-\sqrt{2})$

10. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y=-\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y=\frac{x+4}{x+3}$ ② $y=\frac{x+4}{x-3}$ ③ $y=\frac{4x-4}{2x-1}$

④ $y=\frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y=\frac{x+3}{2-x}$

해설

① $y=\frac{x+4}{x+3}=\frac{(x+3)+1}{x+3}=\frac{1}{x+3}+1$

② $y=\frac{x+4}{x-3}=\frac{(x-3)+7}{x-3}=\frac{7}{x-3}+1$

③ $y=\frac{4x-4}{2x-1}=\frac{2(2x-1)-2}{2x-1}=\frac{-2}{2x-1}+2=\frac{-1}{x-\frac{1}{2}}+2$

④ $y=\frac{2x}{2x-1}=\frac{(2x-1)+1}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}+1=\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+1$

⑤ $y=\frac{x+3}{2-x}=\frac{-(2-x)+5}{2-x}=\frac{-5}{x-2}-1$

11. 평행이동 $f:(x,\ y)\rightarrow(x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x}+1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\dfrac{1}{x-m}+1+n$ 이 식이
$y=\dfrac{-x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-1$ 과 같으므로
$m=2,\ 1+n=-1$ 에서 $n=-2$
$\therefore\ m-n=4$

12. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y = \dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $y = \dfrac{-x-1}{x-1}$ ㄴ $y = \dfrac{x}{x-1}$ ㄷ $y = \dfrac{-2x-1}{x+1}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

함수 $y = \dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축으로 α만큼, y축으로 β만큼 평행이동시키면

$y = \dfrac{1}{x-\alpha} + \beta$꼴이 된다.

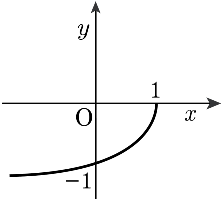
ㄱ $y = \dfrac{-x-1}{x-1} = \dfrac{-(x-1)-2}{x-1} = -\dfrac{2}{x-1} - 1$

ㄴ $y = \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{(x-1)+1}{x-1} = \dfrac{1}{x-1} + 1$

ㄷ $y = \dfrac{-2x-1}{x+1} = \dfrac{-2(x+1)+1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} - 2$

따라서, 구하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

13. $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

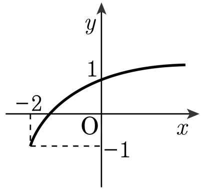
양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

14. 함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$는 상수)

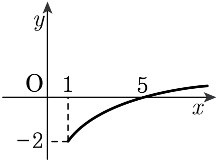


① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$
③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2},\ 0)$
⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는
함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b=2$, $c=-1$
$\therefore\ y=a\sqrt{x+b}+c=a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$
따라서, 함수 $y=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$x+2=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$

15. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1　　② -1　　③ 2

④ -2　　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a$, $c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

16. $\sum_{k=1}^{10}\left[\dfrac{100}{k}\right]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 291

해설

$\sum_{k=1}^{10}\left[\dfrac{100}{k}\right] = 100+50+33+25+20+16+14+12+11+10 = 291$

17. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]=\left[\frac{2^1}{10}\right]+\left[\frac{2^2}{10}\right]+\left[\frac{2^3}{10}\right]+\left[\frac{2^4}{10}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{10}}{10}\right]$

$=0+0+0+1+3+6+12+25+51+102=200$

18. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\dfrac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4} \\ &= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\dfrac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \dfrac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$

$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$

$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots ㉠$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=$ (우변)$=2$

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n=1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$

20. 양의 정수 n에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$이라 할 때 다음은
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n\left\{p(n) - 1\right\}$ $(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때 (좌변)$= p(1) = 1$
> (우변)$= 2\left\{p(2) - 1\right\} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$이므로 성립한다.
> (ii) $n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k\left\{p(k) - 1\right\}$
> $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (㉠)p(k) - k$
> $= (㉠)\left\{p(k+1) - ㉡\right\} - k$
> $= (k+1)\left\{p(k+1) - 1\right\}$ 이므로 $n = k+1$일 때 성립한다.
> 따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k,\ \frac{1}{k}$ ② $k,\ \frac{1}{k+1}$ ③ $k+1,\ \frac{1}{k}$
④ $k+1,\ \frac{1}{k+1}$ ⑤ $k+2,\ \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots p(k-1) = k\left\{p(k) - 1\right\}$이고,
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k\left\{p(k) - 1\right\} + p(k)$
$= (k+1)p(k) - k$
$= (k+1)\left\{p(k+1) - \frac{1}{k+1}\right\} - k$
$= (k+1)\left\{p(k+1) - 1\right\}$
$\therefore$ ㉠ : $k+1$, ㉡ : $\frac{1}{k+1}$

21. 세 수 $A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$의 대소를 비교하면?

① $A > B > C$　② $B > A > C$　③ $C > B > A$

④ $A > C > B$　⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

$3, 4, 6$의 최소공배수가 12이므로

$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$

$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$

$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$

$\therefore A > B > C$

22. 세 수 A, B, C를

$A=(10\sqrt{5}$의 6제곱근 중 양의 실수$)$

$B=(\sqrt{24}$의 세제곱근 중 실수$)$,

$C=(64$의 8제곱근 중 양의 실수$)$

로 정의할 때, 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 차례로 쓰면?

① A, B ② A, C ③ B, A ④ B, C ⑤ C, B

해설

$A=\sqrt[6]{\sqrt{500}}=500^{\frac{1}{12}}$,

$B=\sqrt[3]{\sqrt{24}}=\left\{(24)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}=24^{\frac{1}{6}}=(24^2)^{\frac{1}{12}}=576^{\frac{1}{12}}$

$C=\sqrt[8]{2^6}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{2^9}=512^{\frac{1}{12}}$ 이므로

$A=500^{\frac{1}{12}}$, $B=576^{\frac{1}{12}}$, $C=512^{\frac{1}{12}}$

이때, $500<512<576$이므로

$A<C<B$

따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수는 차례로 B, A이다.

23. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$

④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$

$B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$

$C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$

$C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로

$\therefore\ C < A < B$

24. $2\log(a-2b)=\log 2b+\log(62b-a)$ 일 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b)=\log 2b+\log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$\log(a-2b)^2=\log 2b(62b-a)$

$(a-2b)^2=2b(62b-a)$

$a^2-4ab+4b^2=124b^2-2ab$

$a^2-2ab-120b^2=0$

$(a+10b)(a-12b)=0$

$\therefore\ a=-10b$ 또는 $a=12b$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b>0,\ 2b>0,\ 62b-a>0$ 이므로

$a>0,\ b>0$

따라서 $a=12b$ 이고 $\dfrac{a}{b}=12$ 이다.

25. 서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $\log_a b = \sin x, \log_a c = \cos x$일 때, $b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$의 값은?

① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$\log_a b = \sin x$에서 $b = a^{\sin x}$

$\log_a c = \cos x$에서 $c = a^{\cos x}$

$$\begin{aligned} \therefore\ b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a \end{aligned}$$

26. $2x = \log_7 2$일 때, $\dfrac{7^{3x}+7^{-3x}}{7^x+7^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{7}{3}$

해설

$2x = \log_7 2$에서 $7^{2x} = 2$

따라서 $\dfrac{7^{3x}+7^{-3x}}{7^x+7^{-x}} = \dfrac{(7^{3x}+7^{-3x})\times 7^{3x}}{(7^x+7^{-x})\times 7^{3x}}$

$= \dfrac{7^{6x}+1}{7^{4x}+7^{2x}} = \dfrac{(7^{2x})^3+1}{(7^{2x})^2+7^{2x}}$

$= \dfrac{2^3+1}{2^2+2} = \dfrac{3}{2}$

27. $\log a$의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a\sqrt{a}$의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$

28. $\log 4.02 = 0.6042$ 일 때, $\log 4020^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $36,\ 0.042$

해설

$\log 4020^{10} = 10\log 4020$

$= 10\log(4.02 \times 1000)$

$= 10(\log 4.02 + \log 1000)$

$= 10(0.6042 + 3)$

$= 10 \times 3.6042 = 36.042$

29. $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $34,\ 0.969$

해설

$\log 3140^{10} = 10 \log 3140$

$= 10 \log(3.14 \times 1000)$

$= 10(\log 3.14 + \log 1000)$

$= 10(0.4969 + 3)$

$= 10 \times 3.4969 = 34.969$

30. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 알맞은 수를 나열한 것은?

$\log 5$, (가), (나), (다), $\log 80$, $\cdots$

① 1, $\log 20$, $\log 40$
② $\log 15$, $\log 20$, $\log 40$
③ $\log 20$, $\log 40$, $\log 50$
④ $\log 27$, $\log 45$, $\log 50$
⑤ $\log 27$, $\log 45$, $\log 52$

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 제 n항을 a_n이라고 하면 첫째항이 $\log 5$, 제 5항이 $\log 80$이므로

$a = \log 5 \cdots$ ㉠

$a_5 = \log 80$에서 $a + 4d = \log 80 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4d = \log 80 - \log 5 = \log \frac{80}{5}$$

$$= \log 16 = 4 \log 2$$

$$\therefore \ d = \log 2$$

$$\therefore \ a_2 = a + d = \log 5 + \log 2 = \log 10$$

$$a_3 = a_2 + d = \log 10 + \log 2 = \log 20$$

$$a_4 = a_3 + d = \log 20 + \log 2 = \log 40$$

31. $\sum_{k=1}^{100}[\log_5 k]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 150 ② 161 ③ 172 ④ 183 ⑤ 193

해설

$\log_5 1=0,\ \log_5 5=2,\ \log_5 125=3$이므로

$[\log_5 1]+[\log_5 2]+[\log_5 3]+[\log_5 4]=0$

$[\log_5 5]+[\log_5 6]+\cdots+[\log_5 24]=1\times 20$

$[\log_5 25]+[\log_5 26]+\cdots+[\log_5 100]=2\times 76$

$\sum_{k=1}^{100}[\log_5 k]=1\times 20+2\times 76=172$

32. 네 수 $1,\ a,\ b,\ c$는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$를 만족시킨다. 공비 r의 값은? (단, $r > 1$)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

$a = r,\ b = r^2,\ c = r^3$ 이므로

$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$

$\log_a b = \log_r r^2 = 2$

따라서, $\log_8 c = \log_a b$ 에서

$\log_2 r = 2$

$\therefore\ r = 2^2 = 4$

33. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 $a_{n+1}-a_n=\log\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 을 만족할 때, a_{100} 의 값과 같은 것은? (단, $a_1=0$)

① $\log\frac{b_{101}}{b_1}$ ② $\log\frac{b_{101}}{b_2}$ ③ $\log\frac{b_1}{b_{100}}$

④ $\log\frac{b_1}{b_{101}}$ ⑤ $\log\frac{b_2}{b_{101}}$

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\left\{\log\frac{b_n}{b_{n+1}}\right\}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_1+\sum_{k=1}^{99}\log\frac{b_k}{b_{k+1}} \\ &= \log\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{b_2}{b_3}\cdots\frac{b_{99}}{b_{100}} \\ &= \log\frac{b_1}{b_{100}} \end{aligned}$$

34. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환하면, $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$\therefore\ 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1-0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

35. 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은?

$$\log\frac{3}{1},\ \log\frac{5}{3},\ \log\frac{7}{5},\ \log\frac{9}{7}\cdots$$

① $\log(2n-1)$　② $\log 2n$　③ $\log(2n+1)$

④ $\log(2n+2)$　⑤ $\log(2n+3)$

해설

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하고 구하는 합을 S_n이라고 하면

$a_k = \log\dfrac{2k+1}{2k-1} = \log(2k+1) - \log(2k-1)$이므로

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\log(2k+1)-\log(2k-1)\}$

$= (\log 3 - \log 1) + (\log 5 - \log 3) + (\log 7 - \log 5) + \cdots + \{\log(2n+1) - \log(2n-1)\}$

$= -\log 1 + \log(2n+1) = \log(2n+1)$

36. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

① $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$

② $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le |a|+|b|+|c|$

③ $\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

④ $a^2+b^2+c^2 \le (a+b+c)^2$

⑤ $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

해설

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$ 이므로

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

③의 경우 양변을 제곱하여 빼면

$3(a^2+b^2+c^2)-|a+b+c|^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0$

$\therefore\ \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

37. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$
$$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$$
$$=\frac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\ ([\text{가}])0 \text{ 이므로}$$
$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \ (\text{단, 등호는 ([나])일 때 성립})$$

① $<, x=y=z$
② $\leq, x=y=z$
③ $\geq, x=y=z$
④ $<, xy=yz=zx$
⑤ $\leq, xy=yz\geq zx$

해설

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$
$$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geq 0 \text{ 이므로}$$
$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \ (\text{단, 등호는 } x=y=z \text{ 일 때 성립})$$

38. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \geq |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \geq 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \geq |-1-1|$

$|-1|-|1| \geq |-2|$

$1-1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \rightarrow (\bigcirc)$

39. $f_1(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x)=f_1\circ f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$ ② $\dfrac{1}{2008}$ ③ $\dfrac{1}{2009}$ ④ $\dfrac{1}{4017}$ ⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x)=(f_1\circ f_1)(x)=f_1\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x)=(f_1\cdot f_2)(x)$$

$$=f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x)=\frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1)=\frac{1}{2008\times1+1}=\frac{1}{2009}$$

40. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \quad \cdots \quad f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore \; f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

41. 실수 x를 입력하면 실수 $\dfrac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\dfrac{2}{3}$를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$ 에서

$f_1\left(\dfrac{2}{3}\right) = -1,\ f_2(-1) = \dfrac{2}{3}$

$f_3\left(\dfrac{2}{3}\right) = -1,\ f_4(-1) = \dfrac{2}{3} \cdots$

따라서 $f_{1999}\left(\dfrac{2}{3}\right) = -1$

42. $\dfrac{x(y+z)}{27}=\dfrac{y(z+x)}{32}=\dfrac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\dfrac{x(y+z)}{27}=\dfrac{y(z+x)}{32}=\dfrac{z(x+y)}{35}=k(k\neq 0)$ 라 하면

$xy+zx=27k$, $zy+xy=32k$, $zx+yz=35k$ 이므로

$2(xy+yz+zx)=94k$, $\therefore\ xy+yz+zx=47k$ 이므로

$yz=20k$, $zx=15k$, $xy=12k$

또, $x^2\cdot y^2\cdot z^2=3600k^3$ 이므로

$x^2\ 400k^2=3600k^3$ 에서 $x^2=9k$

$225k^2\cdot y^2=3600k^3$ 에서 $y^2=16k$

$144k^2\cdot z^2=3600k^3$ 에서 $z^2=25k$

$\therefore\ \dfrac{x^2+y^2}{z^2}=\dfrac{9k+16k}{25k}=1$

43. $x+y=\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{5}$ 일 때, $\dfrac{5x^2-4y^2+z^2}{xy+3yz-2zx}$ 의 값은?

① 1　② $\dfrac{25}{46}$　③ 2　④ $\dfrac{12}{23}$　⑤ $\dfrac{13}{23}$

해설

$x+y=\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{5}=k$ 라고 하면,

$$\begin{cases} x+y=k \\ y+z=8k \\ z+x=5k \end{cases}$$

세 식을 각 변끼리 모두 더하면, $x+y+z=7k$

$\therefore x=-k, y=2k, z=6k$

$$\frac{5x^2-4y^2+z^2}{xy+3yz-2zx}=\frac{5k^2-16k^2+36k^2}{-2k^2+36k^2+12k^2}=\frac{25}{46}$$

44. $3x = 4y = 2z$ 일 때, $\dfrac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$ 의 값은? (단, $xyz \neq 0$)

① $-\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{2}{11}$ ③ $-\dfrac{43}{11}$ ④ $\dfrac{7}{9}$ ⑤ 2

해설

$3x = 4y = 2z = k$ 라 놓는다.

$x = \dfrac{k}{3},\ y = \dfrac{k}{4}, z = \dfrac{k}{2}$ 를 주어진 식에 대입한다.

$$\therefore \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{\frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{4}}{\frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4}}$$

$$= \frac{64 - 36 + 144}{64 + 36 - 144}$$

$$= \frac{172}{-44} = -\frac{43}{11}$$

45. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x(x+1)}}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}}$ 의 값을 구하면?

① $3+\sqrt{15}$ ② $4-\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{3}+1$

④ $5-\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{15}$

해설

$\sqrt{2x+1 \pm 2\sqrt{x(x+1)}} = \sqrt{x+1} \pm \sqrt{x}$ (복호동순)

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
&= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) \\
&= 2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{3}+1
\end{aligned}
$$

46. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때,

$\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

해설

$$\sqrt{1-2\sqrt{x^2(1-x^2)}} + \sqrt{1+2\sqrt{x^2(1-x^2)}}$$

$$= \sqrt{x^2} - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2}$$

$$\left(\because x^2 = \frac{2}{3} > 1 - x^2 = \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{x^2} = 2x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

47. $x = \sqrt{3}$일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}$ ② $-(\sqrt{3}+1)$ ③ $\sqrt{3}+1$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\sqrt{(x+1)\pm 2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \pm 1 (\because \; x > 1)$$

$$(\text{준식}) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

48. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3+b^3=9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k}=a+b \quad \therefore\ b=\sqrt{k}-a$

$a^3+b^3=9ab, \quad a^3+(\sqrt{k}-a)^3=9a(\sqrt{k}-a)$

$\therefore\ 3a(3a-k)+\sqrt{k}(3a^2-9a+k)=0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a-k)=0, \quad 3a^2-9a+k=0$

연립하여 풀면

$\therefore a=2, \quad k=6$

49. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분이 a, 소수 부분이 b라 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $3-\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=3-\sqrt{3}$

따라서 $a=1,\ b=2-\sqrt{3}(\because 1<\sqrt{3}<2)$

$\therefore \frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=1+\sqrt{3}$

50. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$의 소수 부분 x에 대하여 $y=x+\dfrac{1}{x}$일 때, $\sqrt{x(y-2)}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}-1$

해설

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{11-2\sqrt{18}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2}$$
$$= 3-\sqrt{2}3-\sqrt{2}$$
$$= 1.\cdots \Rightarrow \text{소수부분 } x \ : \ 2-\sqrt{2}$$

$$y = x+\frac{1}{x} = 2-\sqrt{2}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$
$$= 2-\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$
$$= 3-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y-2 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x(y-2)} = \sqrt{(2-\sqrt{2})\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$
$$= \sqrt{2}-1$$

51. m이 유리수일 때, $\dfrac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}=\frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$=\frac{-7m+15}{9-2m^2}-\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}\cdot\sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}=0$$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

52. $2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$($a$, b는 유리수) 일 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$

양변을 제곱하면

$4+3+4\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$

$\therefore\ a=7,\ b=4\quad \therefore\ a-b=7-4=3$

53. x, y가 유리수이고, 등식 $x^2 + \sqrt{3}y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y - 3 - 3\sqrt{3} = 0$이 성립할 때, 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

주어진 등식을 $\sqrt{3}$에 대하여 정리하면

$(x^2 - 2x - 3) + (y^2 + 2y - 3)\sqrt{3} = 0$

여기서, $x^2 - 2x - 3$, $y^2 + 2y - 3$ 이 모두 유리수이고 $\sqrt{3}$ 이 무리수이므로

$x^2 - 2x - 3 = 0$이고, $y^2 + 2y - 3 = 0$

즉,$(x-3)(x+1) = 0$이고 $(y+3)(y-1) = 0$

$\therefore$ $x = 3$ 또는 $x = -1$ 이고 $y = -3$ 또는 $y = 1$

따라서, 구하는 x, y의 쌍은

$(x, y) = (3, 1), (3, -3), (-1, 1), (-1, -3)$

54. 일차 이상의 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ 을 $3x - 1$ 로 나눈 나머지를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 $\frac{p}{4} - \frac{1}{q}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ (p, q는 자연수) 로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$f(x)$ 를 $3x - 1$ 로 나눈 나머지는

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{3}{2} \times 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 15 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{59}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$\therefore\ p + q = 59 + 4 = 63$

55. 자연수 k에 대하여 수열 $2^3+1,\ 2^4+3,\ 2^5+5,\ \cdots,2^k+19$의 합을 S라 할 때, $S+k$의 값은?

① $2^{12}+92$　② $2^{12}+108$　③ $2^{13}+92$
④ $2^{13}+104$　⑤ $2^{13}+128$

해설

수열 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\cdots$ 의 제 n항은 $2n-1$이므로

$2n-1=19,\ 2n=20,\ \therefore\ n=10$

이때, $k=12$이므로

$$S=(2^3+1)+(2^4+3)+(2^5+5)+\cdots+(2^{12}+19)$$

$$=(2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{12})+(1+3+5+\cdots+19)$$

$$=\frac{2^3(2^{10}-1)}{2-1}+\frac{10(1+19)}{2}$$

$$=2^{13}-8+100=2^{13}+92$$

$\therefore\ S+k=2^{13}+92+12=2^{13}+104$

56. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$의 값은?

① $2^{10} - 3$ ② $2^{10} - 1$ ③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$ ⑤ $2^{10} + 3$

해설

$a_n = 2^n + (-1)^n$에서

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$
$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots (2^9 - 1)$$
$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$
$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

57. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_2 = -1$

㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$

㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$에서 $n = 1$을 대입하면

$2\sum_{k=1}^{1} a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$

즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$

$$\therefore\ a_2 = \frac{4a_1 + 1}{3} = -\frac{3}{3} = -1(\text{참})$$

㉡ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots$ ㉠

$2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots$ ㉡

㉡−㉠에서

$2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$

$2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$

$\therefore\ 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$(거짓)

㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$

$= 2(3a_{n+1} - a_n)$

따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다. (참)

따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

58. $a_2 = 3a_1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_8 = 243$ 일 때, a_{15} 의 값은?

① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ 에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$ 이고 공비가 3 인 등비수열이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_1 \cdot 3^{k-1}$

$= a_1 + 2a_1 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$$= a_1 + 2a_1 \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

$a_8 = a_1 \cdot 3^7 = 243 = 3^5$ 에서 $a_1 = 3^{-2}$

$\therefore\ a_{15} = 3^{-2} \cdot 3^{14} = 3^{12}$

59. $a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

① $2^{10} + 6$ ② $2^{10} + 0$ ③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$ ⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$ 꼴로 변형하면

$a_{n+2} - (1 + P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$

즉, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$ 이고 공비가 2 인 등비수열이다.

$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$$

$$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$$

60. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,$
$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$
$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$
$a_{n+1} - a_n = b_n$이라하면
$2b_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$
$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$
$\therefore \{b_n\}$은 초항이 1이고
공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열
$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$
$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$
$$\vdots$$
$$+\underline{\left|\ a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right.}$$

$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$= 1 + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$
$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$
$a_n = 3 - 2^{-n+2}$
$a_{50} = 3 - 2^{-48}$
$p = 3,\ q = -48\ \therefore p + q = -45$

61. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하면?

① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이고,

$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$이므로

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$

$$= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$$

62. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $P_n(a_n)$과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$일 때, 점 P_n의 좌표 a_n은?

① $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
② $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
③ $\frac{25}{6}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
④ $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$
⑤ $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+3a_n}{2+3}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$$

$$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{3}{5}b_n$

이때, $a_2=5,\ a_1=0$이므로 $b_1=a_2-a_1=5$

$$\therefore b_n=b_1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$=\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

63. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $2^{4+2}+3^{1+2}=91=13\cdot 7$로 13의 배수이다

(ii) $n-k$(k는 자연수)일 때 성립한다고 가정하면

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$(m은 자연수)

$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}=$ ㉠ $\cdot 2^{4k+2}+$ ㉡ $\cdot 3^{k+2}$

$=$ ㉠ $\cdot 13m+$ ㉢ $\cdot 3^{k+2}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 $2^{4n+2}+3^{k+2}$은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$ 의13의 배수이다.

위의 증명에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 수들의 합은?

① 1 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$일 때

$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}$도 13의 배수가

되는지 확인하는 과정이다.

$2^4\cdot 2^{4k+2}+3\cdot 3^{k+2}$

$=2^4\cdot(13m-3^{k+2})+3\cdot 3^{k+2}$

$=2^4\cdot 13m-16\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k+2}$

$=2^4\cdot 13m+(-13)\cdot 3^{k+2}$

$\therefore$ ㉠$=16$, ㉡$=3$, ㉢$=-13$

$\therefore$ ㉠$+$㉡$+$㉢$=6$

64. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$
② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$
③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$
④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$
⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

해설

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

65. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$

$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$

$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$

$= 3(7m' + 4^k)$

$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
$7^n - 4^n$은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$일 때 증명한 것이다.
$\therefore$ ①

66. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})$$

$$= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2 - \frac{1}{3})$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

67. 자연수 n에 대하여 $x = \dfrac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}$ 일 때, $(x + \sqrt{1 + x^2})^{2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 25

해설

$$1 + x^2 = 1 + \frac{5^{\frac{2}{n}} - 2 - 5^{-\frac{2}{n}}}{4}$$

$$= \frac{5^{\frac{2}{n}} + 2 - 5^{-\frac{2}{n}}}{4} = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2$$

$$\therefore (x + \sqrt{1 + x^2})^{2n}$$

$$= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{2n} = \left(5^{\frac{1}{n}}\right)^{2n} = 5^2 = 25$$

68. $f(x)=2^x$ 일 때, 다음 중 16^{16} 과 같은 것은?

① $f(f(1))$　② $f(f(2))$　③ $f(f(6))$

④ $f(f(10))$　⑤ $f(f(16))$

해설

$f(x)=2^x$ 에서 $f(6)=2^6=64\cdots$㉠

$16^{16}=(2^4)^{16}=2^{64}=f(64)\cdots$㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ 16^{16}=f(64)=f(f(6))$

69. 집합 M을 $M = \{3a+5b|a,\ b\text{는 음이 아닌 정수}\}$로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

㉠ $89 \in M, 97 \in M$
㉡ $K \in M \ \Rightarrow\ K+3 \in M$
㉢ 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $89 = 9+80 = 3\times3+5\times16 \in M$

$97 = 27+70 = 3\times9+5\times14 \in M$

㉡ $3a+5b = K$ 라 하면

$K+3 = 3(a+1)+5b \in M$

㉢ $10 = 3\times0+5\times2$

$11 = 3\times2+5\times1$

$12 = 3\times4+5\times0$

$13 = 3\times1+5\times2$

$14 = 3\times3+5\times1$

이므로 15 이후의 자연수는 $10+5=15$, $11+5=16$, $12+5=17$, $13+5=18$, $14+5=19\cdots$ 의 꼴로 표현이 가능하다.
따라서 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

70. 자연수를 원소로 가지는 집합 S가 조건 '$x \in S$ 이면 $(4-x) \in S$ 이다.'를 만족한다. 이 때, 집합 S의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

집합 S의 원소는 자연수이어야 하므로 x가 자연수이어야 한다. 또한, 조건 '$x \in S$ 이면 $(4-x) \in S$'로부터 x가 S의 원소이면 $(4-x)$도 S의 원소이므로 $(4-x)$도 자연수이다.$1 \in S$ 이면 $(4-1) \in S$, 즉 $3 \in S$, $2 \in S$ 이면 $(4-2) \in S$, 즉 $2 \in S$, $3 \in S$ 이면 $(4-3) \in S$, 즉 $1 \in S$ 이므로 1과 3은 동시에 S의 원소이거나 S의 원소가 아니어야 한다.
한편, 2는 혼자서 S의 원소이거나 S의 원소가 아닐 수 있다.
따라서 두 집합 $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$의 원소들을 동시에 갖거나 갖지 않는 모든 집합들을 보면S_1만을 가질 때에는 $\{2\}$,S_2만을 가질 때에는 $\{1, 3\}$,S_1, S_2를 모두 가질 때에는 $\{1, 2, 3\}$이다.
따라서 3개이다.

71. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

> (가) $1 \in A$
> (나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

> ㉠ 집합 A 는 유한집합이다.
>
> ㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
>
> ㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$\sqrt{2} \in A,\ (\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^3 \in A,\ \cdots,$
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^4 \in A,\ (\sqrt{2})^6 \in A,\ \cdots,$
즉 $2 \in A,\ 2^2 \in A,\ 2^3 \in A,\ \cdots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ (반례)
집합 $A = \{0,\ 1,\ \sqrt{2},\ (\sqrt{2})^2,\ (\sqrt{2})^3,\ \cdots\}$은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

72. 집합 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 C의 개수는?

㉠ $A = B \cup C$	㉡ $n(A) = 7$	㉢ $n(B) = 4$

① 32 개 ② 16 개 ③ 8 개 ④ 4 개 ⑤ 2 개

해설

집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$라 놓으면 집합 A의 원소는 7개이고, $A = B \cup C$이므로

$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ x_1,\ x_2,\ x_3\}$ 이 때

집합 C는 x_1, x_2, x_3을 반드시 원소로 가져야 하므로

$\{x_1,\ x_2,\ x_3\} \subset C \subset A$

집합 C는 x_1, x_2, x_3을 포함하는 A의 부분집합이므로 그 개수는

$2^{7-3} = 2^4 = 16$(개)

73. 집합 $S = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 집합 $A = \{xy | x \in S, y \in S\}$ 이다. 집합 A 의 부분집합 중 임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

자연수 N 의 약수의 개수가 3 개이면 N 은 소수의 제곱수이다.
$S = \{2, 3, 5, 7\}$, $A = \{xy | x \in S, y \in S\}$ 이고 S 의 원소는 모두 소수이므로,
임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합은 $\left\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\right\} = \{4, 9, 25, 49\}$ 의 부분집합이다.
따라서 $2^4 = 16$ (개)

74. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 $X \subset A$, $A \cap X^c = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$A \cap X^c = A - X = \{1,\ 4\}$

1, 4는 X의 원소가 될 수 없다.

그러므로 구하는 집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$ 의 진부분집합의 개수와 같다.

$\therefore\ 2^3 - 1 = 7$(개)

75. 두 집합 $A=\{3,2a-5,2a+1\}$, $B=\{a-2,a,a+2\}$ 에 대하여 $A\cap B^c=\{7\}$ 일 때, a 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A=\{3,2a-5,2a+1\}$, $B=\{a-2,a,a+2\}$ 이고

$A\cap B^c=A-B=\{7\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 7 이 반드시 있다.

(1) $2a-5=7$ 일 때, $a=6$ 이고

$A=\{3,7,13\}$, $B=\{4,6,8\}$ 이다.

이때 $A-B\neq 7$ 이므로 성립할 수 없다.

(2) $2a+1=7$ 일 때, $a=3$ 이고

$A=\{1,3,7\}$, $B=\{1,3,5\}$ 이다.

이때 $A-B=\{7\}$ 이므로 성립된다.

$\therefore a=3$

76. $A = \{1, x, 3\}, B = \{x-1, 5, 6\}$ 이고 $A - B = \{2, 3\}$ 일 때, $B \cap A^c$ 은?

① $\{1, 5\}$ ② $\{1, 6\}$ ③ $\{2, 5\}$ ④ $\{2, 6\}$ ⑤ $\{5, 6\}$

해설

$A - B = \{2, 3\}$ 이므로 $x = 2$ 이다. 따라서 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 5, 6\}$ 이고 $B \cap A^c = B - A = \{5, 6\}$ 이다.

77. 두 집합 $A = \{1, a, a+2\}$, $B = \{3, a-2, 2 \times a\}$ 에 대하여 $A - B = \{5\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$a - b = \{5\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.
(1) $a = 5$ 일 때, $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{3, 10\}$ 이므로 $A - B = \{1, 5, 7\} \neq \{5\}$ 이다.
(2) $a + 2 = 5$, 즉 $a = 3$ 일 때, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$ 이므로 $A - B = \{5\}$ 이다.
(1),(2) 에서 $a = 3$ 이다.

78. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각 $A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\}$,
$B = \left\{x|x\text{는 두 자리 자연수}\right\}$ 일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$
$B = \left\{x|x\text{는 두 자리 자연수}\right\} = \{10, 11, 12, 13, \cdots\}$
$(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로
$n(A^c \cup B)^c = 7$

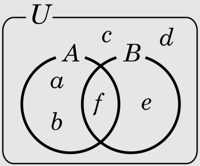
79. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{a, b\}$, $B - A = \{e\}$, $A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 A^c 은?

① $\{b\}$ ② $\{e\}$ ③ $\{b, e\}$

④ $\{c, d\}$ ⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



80. 전체집합 $U = \{1,3,5,7,9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3\}$, $B - A = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{7,9\}$ 일 때, $A \cap B$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{1,3\}$
④ $\{1,3,5\}$ ⑤ $\{1,5\}$

해설

$A - B = \{3\}$, $B - A = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{7,9\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이다.

81. a, b는 양의 상수이다. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$, $x>0$, $y>0$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$ ② $4\sqrt{ab}$ ③ $a+b+2\sqrt{ab}$

④ $a+b+4\sqrt{ab}$ ⑤ $ab+3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균)≥ (기하평균) 이므로

$$(x+y)\cdot 1=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$$

$$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geq a+b+2\sqrt{\frac{ay}{x}\cdot\frac{bx}{y}}$$

$$=a+b+2\sqrt{ab}$$

82. $x > -1$일 때 $x + \dfrac{1}{x+1}$의 최솟값을 m, 그 때의 x의 값을 k라 할 때 $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x+1 > 0$이므로 $x + \dfrac{1}{x+1} = x+1+\dfrac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1)\dfrac{1}{x+1}} - 1 = 1$

$\therefore m = 1$

이 때 등호는

$x+1 = \dfrac{1}{x+1}$에서 $x = 0, -2$

$x > -1$이므로 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다.

$\therefore\ k = 0$

$\therefore\ m + k = 1$

83. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13 ② 24 ③ 25 ④ 28 ⑤ 36

해설

$a > 0,\ b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b)\cdot\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{4b}{a}} = 2\cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right) \geq 12 + 13 = 25$$

84. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A(x = 1,\ 2,\ 3)$ 이 성립하는 것의 개수는?

① 3 개 ② 5 개 ③ 9 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

$2x - f(x) \in A$ 이면, $x = 1 \;\Rightarrow\; 2 - f(1) \in A$

$\therefore\; f(1) = 1$

$x = 2 \;\Rightarrow\; 4 - f(2) \in A$

$\therefore\; f(2) = 1,\ f(2) = 2,\ f(2) = 3$

$x = 3 \;\Rightarrow\; 6 - f(3) \in A$

$\therefore\; f(3) = 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

85. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개　② 18 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)
그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x) \neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24 - 6 = 18$ (가지)

86. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

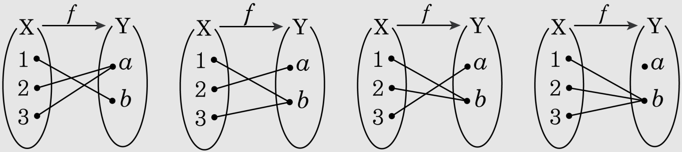
▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다

따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



87. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$이라 하고, $P_n = \dfrac{T_2}{T_2 - 1} \times \dfrac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \dfrac{T_n}{T_n - 1}$ $(n \geq 2)$라고 할 때, P_{1991}에 가장 근사한 값은?

① 2.0 ② 2.3 ③ 2.6 ④ 2.9 ⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{T_n}{T_n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \fallingdotseq 2.9$$

88. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$ $+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

① $a+b+c$　② $a^2+b^2+c^2$　③ $a^3+b^3+c^3$

④ $ab+bc+ca$　⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면

(분자)

$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$

$=(b-c+c-a+a-b)x$

$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$

$\therefore\ f(x)=0\quad \therefore\ f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로

$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고

$$f(a)=\frac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{-1}{b-c}+\frac{1}{b-c}=0$$

$$f(b)=\frac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{-1}{a-c}+\frac{1}{a-c}=0$$

그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고

$f(a)=f(b)=0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(2013)=0$

89. $\dfrac{2^1+2^0+2^{-1}}{2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}}$ 를 풀면?

① 6　　② 8　　③ $\dfrac{31}{2}$　　④ 24　　⑤ 512

해설

분자, 분모에 2^3 을 곱하면

$$\frac{2^3(2^1+2^0+2^{-1})}{2^3(2^{-2}+2^{-3}+2^{-4})}=\frac{2^3(2^1+2^0+2^{-1})}{2^1+2^0+2^{-1}}$$

$$=2^3=8$$

해설

$$\frac{2+1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{16}}=8$$

90. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$ ③ $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$

④ $\sqrt[3]{2}$ ⑤ 1

해설

$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$, $b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면

$a^3+b^3=10,\ ab=-3,$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$

$a+b=x$ 라고 하면,

$x^3+9x-10=0,$

$(x-1)(x^2+x+10)=0$

$\therefore\ x=1$

91. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $a-b=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 가 성립할 때, a^2+ab+b^2의 값을 구하면?

① $4\sqrt{5}+3\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}+2\sqrt{3}$　③ $4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

④ $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\} \\ &= \frac{1}{2}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5}+3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\} \\ &= \frac{1}{4}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5}-2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore\ a^2+ab+b^2=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

92. $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$일 때, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$의 값을 구하면?

① 202 ② 204 ③ 206 ④ 208 ⑤ 210

해설

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} = x$$

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{17-2\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2}$$

$$= 3-2\sqrt{2} = y$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x+y) + y^2(x+y)$$

$$= (x+y)(x^2+y^2)$$

각각 x, y를 대입하여 계산한다.

$(x+y)(x^2+y^2) = 34 \times 6 = 204$

93. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{k} = b_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^2$

$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \ (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$

94. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은?

① 110　② 125　③ 145　④ 160　⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 2n + 1 (n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

$n = 1$ 일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

따라서

$a_n = 2n + 1 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이므로

$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5} k(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{5} (2k^2 + k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \dfrac{5 \cdot 6}{2} = 125$

95. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 25 ④ 27 ⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

96. 수열 $\{a_n\}$은 처음 12개 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{12}$가 서로 다르고 $a_{n+12} = a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킨다. 이 때, 세 집합

$A = \{a_{4n+1}, n$은 자연수$\}$

$B = \{a_{5n+2}, n$은 자연수$\}$

$C = \{a_{6n+3}, n$은 자연수$\}$

의 원소의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+12} = a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$이므로 12개의 숫자가 반복하여 나타나는 수열이다.

(i) $b_n = a_{4n} + 1$이라 하면

$\{b_n\} = a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, a_{21}, a_{25}, \cdots$

위의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{12}$을 이용하여 다시 쓰면

$\{b_n\} : a_5, a_9, a_1, a_5, a_9, a_1, \cdots$ 이므로 $A = \{a_1, a_5, a_9\}$

$\therefore\ p = n(A) = 3$

(ii) $c_n = a_{5n+2}$라 하면

$\{C_n\} : a_7, a_{12}, a_{17}, a_{22}, a_{27}, a_{32}, a_{37}, a_{42}, a_{47},$

$a_{52}, a_{57}, a_{62}, a_{67}, \cdots$

이므로 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{12}$를 이용하여 다시쓰면

$\{C_n\} = a_7, a_{12}, a_5, a_{10}, a_3, a_8, a_1, a_6, a_{11}, a_4, a_9,$

$a_2, a_7, \cdots$

이므로 $B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_{12}\}$

$\therefore\ q = n(B) = 12$

(iii) $d_n = a_{6n+3}$이라 하면

$\{d_n\} : a_9, a_{15}, a_{21}, a_{27}, \cdots$

위의 수열을 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{12}$를 이용하여 다시 쓰면

$\{d_n\} : a_9, a_3, a_3, \cdots$

이므로 $C = \{a_3, a_9\}$

$\therefore\ r = n(C) = 2$

이상에서 $p + q + r = 3 + 12 + 2 = 17$

97. 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3, \cdots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $2^n - n$ ② $2^{n+1} - 1$ ③ $2^{n+1} - n$

④ $2^{n+1} - n - 1$ ⑤ $2^{n+1} - n - 2$

해설

수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$$

98. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

(가) $a_{4n} = n^2 (n \geq 1)$ (나) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} (n \geq 1)$

① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

(나)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4,\ a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \cdots$ 이므로

$\sum_{k=1}^{40} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40})$

$= 2a_4 + 2a_8 + 2a_{12} + \cdots + 2a_{40}$

$= 2\sum_{k=1}^{10} a_{4k} = 2\sum_{k=1}^{10} k^2 (\because (가))$

$$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$$

99. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{51} - a_1$　　② $a_{51} - a_2$　　③ $a_{51} + a_1$

④ $a_{52} - a_2$　　⑤ $a_{52} + a_2$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_3 - a_2 \\
a_2 &= a_4 - a_3 \\
&\ \vdots \\
+)\ \underline{a_{50}} &\underline{= a_{52} - a_{51}} \\
\sum_{k=1}^{50} a_k &= a_{52} - a_2
\end{aligned}
$$

100. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

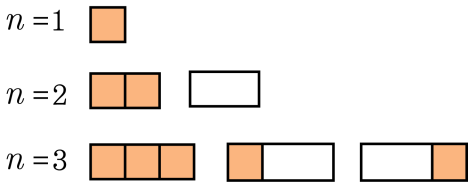
$\therefore\ 3a_1 + 5a_2 = 62$

$a_1,\ a_2$의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$이므로

$a_1 = 4,\ a_2 = 10$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 14$

101. 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1 인 직사각형을 가로와 세로의 길이가 모두 1 인 타일과 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1 인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$ 인 경우는 1 가지, $n = 2$ 인 경우는 2 가지, $n = 3$ 인 경우는 3 가지가 존재한다. 가로의 길이 n에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n 이라 할 때, a_{10} 의 값을 구하여라.
(단, n은 자연수이다.)



▶ 답 : ____________ 가지

▷ 정답 : 89 가지

해설

a_n 은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1 인 경우와 2 인 경우 2 가지가 있으므로
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 가 성립한다. 그러므로
$a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$
즉, 가로의 길이가 10 인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89 가지이다.

102. m, n이 정수일 때, $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

① 288　② 2534　③ 3042　④ 5164　⑤ 7254

해설

$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$ 이고 $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{4}{m}}$

이 수가 자연수가 되려면 $-\dfrac{6}{n}$과 $-\dfrac{4}{m}$가 모두 자연수가 되어야 하므로

$n = -1, -2, -3, -6$ 이고 $m = -1, -2, -4$ 이다.

따라서 $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은

$(2^6 + 2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^2 + 3) = 78 \times 93 = 7254$

103. 실수 x에 대하여 $a = 2^{\sec x}$, $b = 4^{\tan x}$라 하자. $a^{-\sin x} = 3$일 때, b의 값을 구하면?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$a = 2^{\sec x} = 2^{\frac{1}{\cos x}}$ 이므로

$b = 4^{\tan x} = 4^{\frac{\sin x}{\cos x}} = 2^{\frac{2 \sin x}{\cos x}} = a^{2 \sin x}$

$\therefore\ b = (a^{\sin x})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

104. 세 종류의 곰팡이 A, B, C의 수를 조사하였더니 그 개체 수가 A는 2시간마다 2배로, B는 3시간마다 3배로 C는 6시간마다 11배로 증가하였다. 이 조사에서 A, B, C의 1시간 후의 개체 수는 각각 처음의 a배, b배, c배임을 알 수 있다. 이때, a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$

④ $c < a < b$ ⑤ $c < b < a$

해설

1시간 동안 A, B, C의 수는 각각 처음의 a배, b배, c배만큼 증가하고, A의 수는 2시간마다 2배로, B의 수는 3시간마다 3배로, C의 수는 6시간마다 11배로 증가하므로

$a^2 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}$

$b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}$

$c = \sqrt[6]{11} = 11^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ a < b < c$

105. 1이 아닌 세 자연수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$를 만족하는 k의 값들 중 최소인 수를 p라 할 때, $\log_{16} p = \dfrac{b}{a}$ (단, $a,\ b$는 서로소)이다. 이때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$2,\ 3,\ 5$의 최소공배수가 30이므로
$k = 2^{30},\ 3^{30},\ 4^{30},\ \cdots$
따라서, k의 최소값은 2^{30}이므로 $p = 2^{30}$이다.

$$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$\therefore\ a+b=17$

106. $10^a = 2,\ 10^b = 3$일 때, $\log_{15} 10$을 $a,\ b$로 나타내면?

① $\dfrac{1}{a+b+1}$ ② $\dfrac{1}{a-b+1}$ ③ $\dfrac{1}{a+b-1}$
④ $\dfrac{1}{b-a+1}$ ⑤ $\dfrac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2,\ 10^b = 3$에서 $a = \log_{10} 2,\ b = \log_{10} 3$

$\log_{15} 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 15}$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \dfrac{10}{2}$

$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$

$\therefore\ \log_{15} 10 = \dfrac{1}{b-a+1}$

107. $3^a = 2,\ 3^b = 7$일 때, $\log_6 84$를 $a,\ b$로 나타내면?

① $\dfrac{2a+b+1}{a+1}$　② $\dfrac{a+2b+1}{b+1}$　③ ab

④ $\dfrac{2a+b-1}{a+1}$　⑤ $\dfrac{2a+b-1}{b+1}$

해설

$3^a = 2$이므로 $a = \log_3 2$, $3^b = 7$이므로 $b = \log_3 7$

$$\therefore\ \log_6 84 = \frac{\log_3 84}{\log_3 6} = \frac{\log_3(2^2 \times 3 \times 7)}{\log_3(2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$= \frac{2\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1} = \frac{2a+b+1}{a+1}$$