

1. 임의의 x 에 대하여 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면

$$-1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = -1$$

해설

$$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$

$$= (x+1)\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} + d$$

$$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1) + b\} + c] + d \text{ 이므로}$$

$x^3 - 1$ 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때

차례대로 나오는 나머지가 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1	
		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	-2	← d
		-1	2		
-1	1	-2	3	← c	
		-1			
	1	-3	← b		
	↑				
	a				

2. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

3. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$

㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,

$f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$

그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.

$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$

따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

4. $x^3 + x^2 + 2$ 를 다항식 $x^2 + 2x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $Q(x) + R(x)$ 의 값은?

① $2x - 3$

② $2x$

③ $3x + 2$

④ $4x$

⑤ $4x + 1$

해설

$x^3 + x^2 + 2$ 를 $x^2 + 2x - 1$ 로 직접 나누면

$$Q(x) = x - 1, \quad R(x) = 3x + 1$$

$$\therefore Q(x) + R(x) = 4x$$

5. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2\end{aligned}$$

6. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x + y + z = 1 \text{ 에서}$$

$$x + y = 1 - z$$

$$y + z = 1 - x$$

$$z + x = 1 - y$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

7. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

8. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2) \\ \therefore a + b + c + d &= 4\end{aligned}$$

9. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

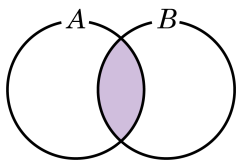
▷ 정답 : 8 개

해설

$\square$ 는 24 의 약수이다.

24 의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

10. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 를 벤다이어그램으로 나타낼 때 어두운 부분에 들어갈 원소를 모두 적어라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 27

해설

$$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \dots\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 9, 27\}$$

어두운 부분은 두 집합 A, B 의 교집합이므로

$$A \cap B = \{3, 27\}$$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 25$, $n(B) = 16$, $A \cap B = B$ 일 때, $n(A \cup B) + n(A - B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$,

$$n(A \cup B) = n(A) = 25,$$

$$n(A - B) = n(A) - n(B) = 25 - 16 = 9$$

$$\therefore n(A \cup B) + n(A - B) = 25 + 9 = 34$$

12. 다음 중 참인 명제는?

- ① 직사각형은 마름모이다.
- ② 평행사변형은 직사각형이다.
- ③ 사다리꼴이면 정사각형이다.
- ④ 정삼각형이면 이등변삼각형이다.
- ⑤ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90^\circ$ 이다.

해설

- ④ 이등변삼각형의 집합은 정삼각형의 집합을 포함하고 있으므로 참이다.

13. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

㉢ $x^2 < x + 12$

㉣ $x^2 + 1 > x$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수 (절대부등식)

㉢ $x^2 < x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$
 $\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 4$

㉣ $x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수 (절대부등식)

14. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 6

② 9

③ 12

④ 16

⑤ 20

해설

식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right) = ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab}$$

$$ab + \frac{9}{ab} \geq 2 \sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} = 2 \sqrt{9} = 6$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right) \geq 10 + 6 = 16$$

15. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12

② 16

③ 24

④ 32

⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가

$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.

문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로

$$\therefore n = 4$$

$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는

$$2^n = 2^4 = 16(\text{개})$$

16. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = -\frac{3}{2}$ ② $a = -\frac{5}{2}$ ③ $a = -\frac{7}{2}$
④ $a = -\frac{9}{2}$ ⑤ $a = -\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1} \circ f)(a) = g^{-1}(f(a)) = 2$ 에서

$f(a) = g(2)$ 이다.

주어진 함수식에 의하여

$$\therefore 2a + 5 = -3 \cdot 2 + 2$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

17. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는

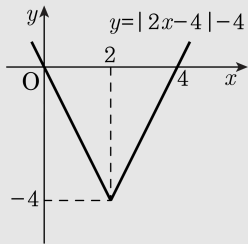
$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



18. 유리식 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $1 - a^2$

② $(1 - a)^2$

③ 1

④ $1 + a^2$

⑤ $(1 + a)^2$

해설

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a-1}} = \frac{a-1}{a-1-a} \\ = 1-a$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a+1}} = \frac{a+1}{a+1-a} \\ = 1+a$$

$$\therefore (\text{준 식}) = 1 - a^2$$

19. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ② 에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

20. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) $1 \in A$

(나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합 A 는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots,$

즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots,$

즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ (반례)

집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

21. 두 집합 $A = \{3, a+1, 9\}$, $B = \{a-1, a, a+3\}$ 에 대하여 $A - B = \{5, 9\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A - B = \{5, 9\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

$$a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 4$$

22. 어느 해 A대 입시에서 전체 지원자 중 550명이 합격했다. 지원자의 남녀의 비가 8 : 5, 합격자의 남녀의 비가 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비가 3 : 2라 할 때, 총 지원자의 수를 구하면?

① 1200

② 1250

③ 1300

④ 1350

⑤ 1400

해설

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

	지원자의 수	합격자의 수	불합격자의 수
남	$8k$	$7s$	$3t$
여	$5k$	$4s$	$2t$

이때, $8k = 7s + 3t$, $5k = 4s + 2t$ 이고,

두 식에서 $k = 2s$

한편, $7s + 4s = 11s = 550$

$\therefore s = 50$

따라서, 총 지원자의 수는 $8k + 5k = 13k = 26s = 26 \times 50 = 1300(\text{명})$

23. 두 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 를 모두 구해보고 그 개수를 구하여라.

$$B \subset X \subset A, B \neq X$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 X 는 $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 a, d 를 항상 원소로 갖는 집합이고 B 가 아니므로

$\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, d, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, d, e\}$,
 $\{a, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$ 의 7개이다.

24. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 3, 5\}$ 이고 $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때, 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28 개

해설

$A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 집합 B 는 적어도 A 의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로

(집합 B 의 갯수)

$= (U \text{의 부분집합의 갯수}) -$

$(A \text{의 원소를 포함하지 않는 } U \text{의 부분집합의 갯수}) = 2^5 - 2^{5-3}$

$= 2^5 - 2^2$

$= 32 - 4 = 28(\text{개})$

25. $a = \sqrt{10 - 8\sqrt{3} - \sqrt{8}}$ 에 대하여 $f(x) = [x], g(x) = x - [x]$ 일 때,
 $\frac{14}{f(a) + g(a)} - \frac{2}{g(a)}$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2

② $2 + \sqrt{2}$

③ $\frac{7}{2}$

④ 4

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$a = \sqrt{10 - 8\sqrt{3} - \sqrt{8}} = \sqrt{10 - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{10 - 8(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{18 - 2\sqrt{32}}$$

$$\therefore a = 4 - \sqrt{2} = 2. \times \times \times$$

$$[a] = 2, f(a) = [a] = 2$$

$$g(a) = a - [a] = 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{14}{f(a) + g(a)} - \frac{2}{g(a)} = \frac{14}{4 - \sqrt{2}} - \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = 2$$