1. $3^{2009} - 2^{2009}$ 를 10 으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $\cdots \rightarrow 4$ 번 거듭제곱을 할 때마다 일의 자릿수는 1 이 된다.
$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $\cdots \rightarrow 4$ 번 거듭제곱을 할 때마다 일의 자릿수는 6 이 된다.
3^{2009} 의 일의 자릿수는 3 이고,
2^{2009} 의 일의 자릿수는 2 이므로,
$3^{2009} - 2^{2009}$ 의 일의 자릿수는 1 이 된다.
$\therefore 3^{2009} - 2^{2009}$ 를 10 으로 나누었을 때의 나머지는 1 이다.

2. 24 를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

어떤 수를 나누어 떨어지게 하는 수를 그 어떤 수의 약수라 한다.
24 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이다.

3. $x = 5^{15} + 1,\ y = 2^{13} + 1$ 일 때 xy는 몇 자리의 수인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$xy = 5^{15} \times 2^{13} + 5^{15} + 2^{13} + 1$
이 때 $5^{15} \times 2^{13} > 5^{15} + 2^{13} + 1$ 이므로
$5^{15} + 2^{13} + 1$은 자릿수를 고려할 때 생각하지 않는다.

$$\begin{aligned} 5^{15} \times 2^{13} &= 5^{13} \times 2^{13} \times 5^2 \\ &= (5 \times 2)^{13} \times 25 \\ &= 10^{13} \times 25 \end{aligned}$$

따라서 xy는 15 자리의 수이다.

4. 다음 중 3^4 을 나타낸 식은?

① 3×4 ② $3+3+3+3$ ③ $4 \times 4 \times 4$

④ $3 \times 3 \times 3 \times 3$ ⑤ 4×3

해설

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ 이다.

5. $2^a = 64$, $3^b = 81$, $5^3 = c$ 를 만족하는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $c - a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 115

해설

$2^1 = 2$
$2^2 = 2 \times 2 = 4$
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
⋮
$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$
이므로 $a = 6$ 이다.
$3^1 = 3$
$3^2 = 3 \times 3 = 9$
$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
이므로 $b = 4$ 이다.
$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ 이므로 $c = 125$ 이다.
따라서 $c - a - b = 125 - 6 - 4 = 115$ 이다.

6. 소수 97 은 각 자리의 숫자를 바꾸면 79 가 되어 역시 소수가 된다. 이처럼 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 50 보다 작은 두 자리의 소수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 11

▷ 정답: 13

▷ 정답: 17

▷ 정답: 31

▷ 정답: 37

해설

에라토스테네스의 체를 이용하여 50 보다 작은 두 자리 소수를 구하면 다음과 같다.

~~10~~ (11) ~~12~~ (13) ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ (17) ~~18~~ (19)
~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ (23) ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ (29)
~~30~~ (31) ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ (37) ~~38~~ ~~39~~
~~40~~ (41) ~~42~~ (43) ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ (47) ~~48~~ ~~49~~

이 중 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 수를 찾아 적으면 11, 13, 17, 31, 37 이다.

7. 다음 중 소인수분해가 바르게 된 것을 모두 고르면?

① $72 = 2^3 \times 3^2$ ② $60 = 2^3 \times 3 \times 5$

③ $54 = 2^2 \times 3^2$ ④ $108 = 2^2 \times 3^3$

⑤ $168 = 2^4 \times 7$

해설

② $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
③ $54 = 2 \times 3^3$
⑤ $168 = 2^3 \times 3 \times 7$

8. 140 에 어떤 자연수를 곱하였더니 자연수 b 의 제곱이 되었다. 곱할 수 있는 자연수 중 가장 작은 자연수를 a 라 할 때, $140 \times a$ 의 값은?

① 3600 ② 4900 ③ 6400

④ 8100 ⑤ 10000

해설

어떤 자연수를 소인수분해했을 때, 모든 소인수의 지수가 짝수이면 그 수는 다른 자연수의 제곱이 된다.

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$

5 와 7 의 지수가 홀수이므로 제곱수가 되기 위해 곱해 주어야 하는 수는 $5 \times 7 \times x^2$ (x^2 은 자연수) 꼴이다.

따라서 가장 작은 수 $a = 5 \times 7 = 35$ 이다.

$140 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 = 4900$

9. 20 의 약수의 개수와 $3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$20 = 2^2 \times 5$ 의 약수의 개수는
$(2+1) \times (1+1) = 6$ (개) 이다.
$3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수는
$(2+1) \times (a+1) = 6$ (개) 가 되어야 한다.
$\therefore\ a = 1$

10. 200 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 14 개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로 1^2, 2^2, $\cdots$, 13^2, 14^2 의 14 개가 있다.

11. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$540 \times x$ 가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 x 는 $3 \times 5 = 15$

12. $90 \times A = B^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

90 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $2 \times 3^2 \times 5 \times A = B^2$ 을 만족하는 A 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 2×5 이다.

13. $\frac{252}{a}$ 가 어떤 자연수의 제곱이라고 한다. a 가 1 보다 클 때, a 가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 지수가 홀수인 수 7 을 나누어 주면 $252 \div 7 = 36 = 6 \times 6$ 이 되어 6 의 제곱이 된다.

14. x는 $3^7 \times 5^4$의 약수 중에서 a^2의 형태로 나타낼 수 있는 수일 때, x의 개수를 구하여라. (단, a는 자연수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

$3^7 \times 5^4$의 약수 중 (자연수)^{2}이 되는 수는
$1,\ 3^2,\ (3^2)^2,\ (3^3)^2,\ 5^2,\ (5^2)^2,\ (3\times5)^2,$
$(3\times5^2)^2,\ (3^2\times5)^2,\ (3^2\times5^2)^2,\ (3^3\times5)^2,$
$(3^3\times5^2)^2$ 이다.
∴ 12개이다.

15. $\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$,

$\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2$, 2×3^2 , 2^3 , $2^3 \times 3^2$ 의 4 개이다.

16. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5 \times a = 7 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 값으로 가능하지 않은 것은?

① 35 ② 70 ③ 105 ④ 140 ⑤ 180

해설

$5 \times a = 7 \times b = c^2$ 에서

i) $a = 5 \times 7^2$, $b = 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (5 \times 7^2) = 7 \times (5^2 \times 7) = (5 \times 7)^2 = 35^2$

ii) $a = 2^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (2^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (2^2 \times 5^2 \times 7) = (2 \times 5 \times 7)^2 = 70^2$

iii) $a = 3^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (3^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (3^2 \times 5^2 \times 7) = (3 \times 5 \times 7)^2 = 105^2$

iv) $a = 4^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 4^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (4^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (4^2 \times 5^2 \times 7) = (4 \times 5 \times 7)^2 = 140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 $35, 70, 105, 140, \cdots$ 이다.

17. 90 에 가능한 한 작은 수 a 를 곱하여 어떤 수 b^2 이 되도록 할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 자연수)

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
$2 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
$\therefore\ a = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$
$90 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 5$
$= 2^2 \times 3^2 \times 5^2$
$= (2 \times 3 \times 5)^2$
$\therefore\ b = 30$
따라서 $a + b = 10 + 30 = 40$ 이다.

18. 72를 x로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되면서 3 의 배수는 되지 않도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

$\frac{72}{x} = \frac{2^3 \times 3^2}{x}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 $x = 2, x = 2 \times 3^2, x = 2^3, x = 2^3 \times 3^2$ 이다.

3 의 배수가 되지 않아야 하므로 $x = 2 \times 3^2, x = 2^3 \times 3^2$ 중 작은 자연수는 $x = 2 \times 3^2 = 18$ 이다.

19. 다음 중 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수가 아닌 것은?

① 5×2^3 ② 80 ③ $2^3 \times 3 \times 5$

④ 125 ⑤ 225

해설

② 80 을 소인수분해하면 $80 = 2^4 \times 5$ 이다. 2^4 은 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수가 아니다.

④ 125 를 소인수분해하면 $125 = 5^3$ 이므로 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수이다.

⑤ 225 를 소인수분해하면 $225 = 3^2 \times 5^2$ 이므로 $2^3 \times 3^3 \times 5^3$ 의 약수이다.

20. 다음 중 63 의 약수가 아닌 것을 고르면?

① 1 ② 3^2 ③ 7 ④ 3×7 ⑤ 7^2

해설

$63 = 3^2 \times 7$

21. $3^a \times 5^b$ 이 225 를 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값을 고르면?

① 1, 1　② 1, 2　③ 2, 1　④ 2, 2　⑤ 2, 3

해설

$3^a \times 5^b$ 이 $225 = 3^2 \times 5^2$ 을 약수로 가지므로, a 는 2 이상의 자연수, b 는 2 이상의 자연수가 되어야 한다.
그 중 최솟값은 $a = 2$, $b = 2$ 일 때이다.

22. 소인수분해를 이용하여 50 의 약수의 개수를 구하려고 한다. 다음 중 a, b, c 에 들어갈 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

$50 = 2^a \times 5^b$ 약수의 개수 : $(a+1) \times (b+1) = c$ (개)

① $1, 2, 3$ ② $1, 2, 6$ ③ $2, 4, 8$ ④ $2, 5, 8$ ⑤ $3, 4, 5$

해설

50 을 소인수분해하면 $50 = 2 \times 5^2$ 이므로 $a = 1, b = 2$ 이다.
또한 50 의 약수의 개수는 $(1+1) \times (2+1) = 6$ (개) 이므로 $c = 6$ 이다.
따라서 $a = 1, b = 2, c = 6$ 이다.

23. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다. x는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x의 값의 개수는?

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
$(\text{소수})^2$ 이므로
150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ 의 5 개

24. 200 에 가장 가까운 7 의 배수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 203

해설

$7 \times 28 = 196$, $7 \times 29 = 203$ 이므로 200 에 가장 가까운 7 의 배수는 203 이다.

25. 다섯 자리의 수 5□142 은 2 의 배수이면서 3 의 배수이다. □ 안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 0

▷ 정답: 3

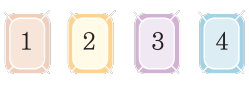
▷ 정답: 6

▷ 정답: 9

해설

2 의 배수이면서 3 의 배수인 수는 50142, 53142, 56142, 59142 이다.

26. 다음 네 장의 숫자 카드 중에서 2 장을 골라 만들 수 있는 두 자리 소수는 모두 몇 개인지 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

2 를 제외한 소수는 홀수이므로 먼저 홀수를 만들어보면 13, 21, 23, 31, 41, 43 이다.
$21 = 3 \times 7$ 이므로 소수가 아니다.
∴ 13, 23, 31, 41, 43 의 5 개이다.

27. $2520 = a^P \times b^q \times c^r \times d^s$ 로 소인수분해될 때, $a \times p + b \times q + \dfrac{c}{r} + \dfrac{d}{s}$ 의 값을 구하여라.
(단, $a < b < c < d$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = a^P \times b^q \times c^r \times d^s$ 이므로
$a = 2,\ b = 3,\ c = 5,\ d = 7$,
$p = 3,\ q = 2,\ r = 1,\ s = 1$
$\therefore a \times p + b \times q + \dfrac{c}{r} + \dfrac{d}{s}$
$= 2 \times 3 + 3 \times 2 + \dfrac{5}{1} + \dfrac{7}{1}$
$= 6 + 6 + 5 + 7$
$= 24$

28. 자연수 x 를 소인수분해 했을 때 나타나는 소인수들의 합을 기호 $S(x)$ 로 나타내기로 할 때, 어떤 자연수 m 을 소인수분해 하면 세 종류의 소인수가 나타나고, $S(m)=12$ 라고 한다. 이 때, 이를 만족하는 m 의 값의 합을 구하여라.
(예를 들면, $72=2\times2\times2\times3\times3$ 이므로 $S(72)=2+2+2+3+3=12$ 가 된다.)

▶ 답:

▷ 정답: 102

해설

세 종류의 소수의 합이 12 이하인 경우는
(2, 3, 5), (2, 3, 7) 의 두 가지 경우이다.
$S(m)=2+2+3+5$ 또는 $S(m)=2+3+7$ 이므로 $m=2\times2\times3\times5=60$ 또는 $m=2\times3\times7=42$
따라서 $60+42=102$ 이다.

29. 자연수 $\frac{540}{n}$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 고르면?

① 15, 60, 135, 540 ② 5, 60, 180, 540

③ 5, 45, 180, 270 ④ 3, 15, 90, 270

⑤ 5, 15, 180, 270

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$,

$\frac{540}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 자연수 n 은

$n = 3 \times 5$, $n = 2^2 \times 3 \times 5$, $3^3 \times 5$, $2^2 \times 3^3 \times 5$ 이다.

30. 4719 를 3 개의 자연수의 곱으로 나타내는 모든 방법의 수를 구하여라. (단, $x \times y \times z$ 와 $x \times z \times y$ 와 같이 곱하는 순서만 다른 식도 서로 다른 방법이다.)

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 12 가지

해설

$4719 = 3 \times 1573 = 3 \times 11 \times 143 = 3 \times 11 \times 11 \times 13$
따라서,
4719 를 3 개의 자연수의 곱으로 나타내는 모든 방법의 수
ⅰ) $(3,\ 11,\ 13)$
3 개의 인수를 나열하는 방법의 수 $= 3 \times 2 = 6$
ⅱ) $(3,\ 11,\ 11),\ (11,\ 11,\ 13)$
3 개의 인수를 나열하는 방법의 수 $= 3$
$3 \times 2 = 6$
$\therefore\ 6 + 6 = 12$(가지)

31. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최대값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값 중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

32. 자연수 n 에 대하여 $n!$ 은 n 이하의 모든 자연수의 곱이고, $S(n)$ 은 n 의 약수의 개수라고 정의한다. 이 때, $\dfrac{S(16!)}{S(15!)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{4}{3}$

해설

$16! = 15! \times 16 = 15 \times 2^4$,
$S(16!)$ 는 $S(15!)$ 보다 2 의 인수가 4 크다.
$S(15!)$ 의 2 의 인수 $\rightarrow 2^{11}$,
$S(16!)$ 의 2 의 인수 $\rightarrow 2^{15}$
$\therefore \dfrac{S(16!)}{S(15!)} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

33. 자연수 $2^3 \times A$ 의 약수의 개수가 12 개일 때, 가장 작은 두 자리 자연수 A 를 구하여라.

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$12 = 12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3$

(1) $12 = 12 \times 1 = (11 + 1)$ 일 때,

$2^3 \times A = 2^{11}$ $\therefore A = 2^8 = 256$

그러나 $2^8 = 256$ 은 두 자리 수가 아니다.

(2) $12 = 6 \times 2 = (5 + 1) \times (1 + 1)$ 일 때,

$2^3 \times A = 2^5 \times (2$가 아닌 소수$) = 2^3 \times (2^2 \times (2$가 아닌 소수$))$

$\therefore A = 12,\ 20,\ 28,\ 44,\ 52,\ \cdots$

(3) $12 = 4 \times 3 = (3 + 1) \times (2 + 1)$ 일 때,

$2^3 \times A = 2^3 \times (2$가 아닌 소수$)^2$

$\therefore A = 9,\ 25,\ 49,\ 121, \cdots$

따라서 가장 작은 두 자리 자연수 A 는 12 이다.