1. 어떤 수를 15 로 나누면 7 이 남는 수 중 100 에 가장 가까운 수는?

① 90 ② 92 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

해설

어떤 수를 x 라 하고 몫을 k 라 하면 $x = 15 \times k + 7$ 이다.
$k = 6$ 일 때, $x = 15 \times 6 + 7 = 97$ 이고 $k = 7$ 일 때, $x = 15 \times 7 + 7 = 112$ 이다.
따라서 100 에 가장 가까운 수는 97 이다.

2. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ 약수가 1 개뿐인 수를 소수라고 한다.

㉡ 133 은 합성수이다.

㉢ 소수의 개수는 유한개이다.

㉣ 3 과 1123 은 서로소이다.

㉤ 십의 자리의 숫자가 p , 일의 자리의 숫자가 q 인 수가 소수이면 pq 도 소수이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ 약수가 1 과 자기 자신인 수를 소수라고 한다.
㉡ 133 의 약수는 1, 7, 19, 133 이므로 합성수이다.
㉢ 소수의 개수는 무한개이다.
㉣ 3 과 1123 의 최대공약수는 1 이므로 서로소이다.
㉤ $p \times q$ 의 약수가 1, p, q, $p \times q$ 이므로 소수가 아니다.

3. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① $2\times2\times4\times4\times7=2^2\times4^2\times7$

② $\dfrac{1}{3\times3\times3\times3}=\dfrac{4}{3^3}$

③ $\dfrac{1}{2\times2\times5\times5}=\dfrac{1}{2^2\times5^2}$

④ $\dfrac{1}{3^2\times3^4}=\dfrac{1}{3^8}$

⑤ $a\times a\times a\times b\times b=a^3\times b^2$

해설

② $\dfrac{1}{3\times3\times3\times3}=\dfrac{1}{3^4}$, ④ $\dfrac{1}{3^2\times3^4}=\dfrac{1}{3^6}$

4. 다음 중 거듭제곱의 표현으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

② $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

③ $a + a + a + a = a^4$

④ $a \times b \times b \times b \times b = a \times b^4$

⑤ $\dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7} = \dfrac{1}{2^3 \times 7^2}$

해설

③ $a + a + a + a = 4 \times a$

5. 7^{100} 을 계산하면 85 자리의 수가 된다. 이 수의 일의 자리의 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

7 의 거듭제곱 수마다 일의 자리 수를 구해보면 7, 9, 3, 1 이 반복되는 것을 알 수 있다.

7의 거듭제곱 수	일의 자리 수
$7^1(=7)$	7
$7^2(=7\times7=49)$	9
$7^3(=7\times7\times7=343)$	3
$7^4(=7\times7\times7\times7=2401)$	1
$7^5(=7\times7\times7\times7\times7=16807)$	7
⋮	⋮

100 은 4 로 나누어 떨어지므로 7^{100} 의 일의 자리의 수는 1 이다.

6. 소수 97 은 각 자리의 숫자를 바꾸면 79 가 되어 역시 소수가 된다. 이처럼 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 50 보다 작은 두 자리의 소수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 11

▷ 정답: 13

▷ 정답: 17

▷ 정답: 31

▷ 정답: 37

해설

에라토스테네스의 체를 이용하여 50 보다 작은 두 자리 소수를 구하면 다음과 같다.

~~10~~ (11) ~~12~~ (13) ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ (17) ~~18~~ (19)
~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ (23) ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ (29)
~~30~~ (31) ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ (37) ~~38~~ ~~39~~
~~40~~ (41) ~~42~~ (43) ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ (47) ~~48~~ ~~49~~

이 중 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 수를 찾아 적으면 11, 13, 17, 31, 37 이다.

7. 120 을 소인수분해한 것 중 알맞은 것은?

① $2^3 \times 3 \times 5$ ② $4^2 \times 3 \times 5$ ③ $2 \times 6 \times 10$

④ $2^2 \times 6 \times 5$ ⑤ $2^2 \times 3 \times 10$

해설

$2 \overline{)\ 120}$

$2 \overline{)\ 60}$

$2 \overline{)\ 30}$

$3 \overline{)\ 15}$

5

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

8. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x를 곱하여 어떤수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 9 ⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 $75 = 3 \times 5^2$ 이므로
$(3 \times 5^2) \times x = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3 이다.
따라서 $y = 15$ 이다.

9. 두 자연수 a, b 에 대하여 $2\times5^a\times11^b$ 의 약수가 12 개일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(1+1)\times(a+1)\times(b+1)=12$
$(a+1)\times(b+1)=6$
$a+1=2,\ b+1=3$ 또는 $a+1=3,\ b+1=2$
$a=1,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=1+2=3$

10. 200 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 14 개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로 1^2, 2^2, $\cdots$, 13^2, 14^2 의 14 개가 있다.

11. 360 을 가장 작은 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이 때, 나누어야 하는 가장 작은 자연수는?

① 1　② 5　③ 10　④ 15　⑤ 20

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
따라서 나누어야 하는 가장 작은 자연수는 $2 \times 5 = 10$ 이다.

12. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$540 \times x$ 가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 x 는 $3 \times 5 = 15$

13. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

① 9 ② 12 ③ 36 ④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$
가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$
$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$
$\therefore A = 12$

14. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5 \times a = 7 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 값으로 가능하지 <u>않은</u> 것은?

① 35 ② 70 ③ 105 ④ 140 ⑤ 180

해설

$5 \times a = 7 \times b = c^2$ 에서

i) $a = 5 \times 7^2$, $b = 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (5 \times 7^2) = 7 \times (5^2 \times 7) = (5 \times 7)^2 = 35^2$

ii) $a = 2^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (2^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (2^2 \times 5^2 \times 7) = (2 \times 5 \times 7)^2 = 70^2$

iii) $a = 3^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (3^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (3^2 \times 5^2 \times 7) = (3 \times 5 \times 7)^2 = 105^2$

iv) $a = 4^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 4^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (4^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (4^2 \times 5^2 \times 7) = (4 \times 5 \times 7)^2 = 140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 $35, 70, 105, 140, \cdots$ 이다.

15. 자연수 160 에 n 을 곱하면 자연수의 제곱이 된다고 한다. 이 때, n 이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.(단, n 은 50 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$160 \times n = 2^5 \times 5 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 2 \times 5$
따라서 n 이 될 수 있는 50 미만의 수는
$2 \times 5 = 10$
$2 \times 5 \times 2^2 = 40$
$\therefore 10,\ 40$
$\therefore 10 + 40 = 50$

16. 자연수 $360\times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.(단, n 은 160 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$360\times n = 2^3\times 3^2\times 5\times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 $n = 2\times 5$

따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는

$2\times 5 = 10$

$2\times 5\times 2^2 = 40$

$2\times 5\times 3^2 = 90$

∴ 10, 40, 90

∴ $10+40+90 = 140$

17. 48 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

48 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

18. 75 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 수는?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하기 위해 곱해 주어야 할 수 중 가장 작은 수는 3이다.

19. $2^2 \times 3 \times 7$ 의 약수가 아닌 것은?

① 2×3　② $2^2 \times 7$　③ 3^2

④ 3×7　⑤ $2 \times 3 \times 7$

해설

$(2^2 \times 3 \times 7$ 의 약수$)$는 $(2^2$ 의 약수$) \times (3$ 의 약수$) \times (7$ 의 약수$)$이다.

20. 자연수 $2^2 \times 3 \times 5$ 의 약수 중에서 두 번째로 큰 수를 a , 세 번째로 큰 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 15　② 30　③ 50　④ 60　⑤ 75

해설

$2^2 \times 3 \times 5$ 의 약수 중 두 번째로 큰 수는 $2 \times 3 \times 5 = 30$, 세 번째로 큰 수는 $2^2 \times 5 = 20$ 이므로, $a+b = 30+20 = 50$ 이다.

21. 다음 중 100 의 약수는?

① 30 ② $5^2 \times 7^2$ ③ 80

④ $2^2 \times 5^2$ ⑤ $2^3 \times 5 \times 7$

해설

100 을 소인수분해하면 $100 = 2^2 \times 5^2$ 이다. 이때 2^2 의 약수는 1, 2, 2^2 이고, 5^2 의 약수는 1, 5, 5^2 이다. 다음 표와 같이 2^2 의 약수와 5^2 의 약수를 각각 곱하면 100 의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 이다.

×	1	2	2^2
1	$1\times1=1$	$1\times2=2$	$1\times2^2=4$
5	$5\times1=5$	$5\times2=10$	$5\times2^2=20$
5^2	$5^2\times1=25$	$5^2\times2=50$	$5^2\times2^2=100$

22. $n = 4p^2q^3$ 일 때, n 의 약수의 개수를 구하여라. (단, $p \neq q \neq 2$ 인 소수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 36 개

해설

n 을 소인수분해하면 $n = 4p^2q^3 = 2^2 \times p^2 \times q^3$ 이다.
따라서 약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) \times (3+1) = 36$ (개) 이다.

23. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다. x는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x의 값의 개수는?

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
$(\text{소수})^2$ 이므로
150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ 의 5 개

24. 옛날부터 우리나라에는 십간(☒☒)과 십이지(☒☒☒)를 이용하여 매해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2011년은 신묘년이다. 다음 중 신묘년이 아닌 해는?

정	무	기	경	신	임	계	갑
축	인	묘	진	사	오	미	신
정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미	갑신
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004

을	병	정	무	기	경	신
유	술	해	자	축	인	묘
을유	병술	정해	무자	기축	경인	신묘
2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

① 1831년 ② 1881년 ③ 1951년
④ 2071년 ⑤ 2131년

해설

십간(☒☒)의 10가지와 십이지(☒☒☒)의 12가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2011년이 신묘년이면 1831년, 1891년, 1951년, 2071년, 2131년도 신묘년이다.

25. 세 자리수인 자연수 전체에 대해, 4 의 배수이지만 5 의 배수가 아닌 수의 개수와 3 의 배수이지만 5, 6 의 배수는 아닌 수의 개수의 합을 구하여라.

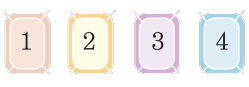
▶ 답 :

▷ 정답 : 300

해설

4 의 배수이지만 5 의 배수가 아닌 수의 개수는 $225 - 45 = 180$
3 의 배수이지만 5, 6 의 배수는 아닌 수의 개수는 $300 - 60 - 150 + 30 = 120$
$\therefore\ 180 + 120 = 300$

26. 다음 네 장의 숫자 카드 중에서 2 장을 골라 만들 수 있는 두 자리 소수는 모두 몇 개인지 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

2 를 제외한 소수는 홀수이므로 먼저 홀수를 만들어보면 13, 21, 23, 31, 41, 43 이다.
$21 = 3 \times 7$ 이므로 소수가 아니다.
∴ 13, 23, 31, 41, 43 의 5 개이다.

27. $2520 = a^P \times b^q \times c^r \times d^s$ 로 소인수분해될 때, $a \times p + b \times q + \dfrac{c}{r} + \dfrac{d}{s}$ 의 값을 구하여라.
(단, $a < b < c < d$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = a^P \times b^q \times c^r \times d^s$ 이므로
$a = 2,\ b = 3,\ c = 5,\ d = 7$,
$p = 3,\ q = 2,\ r = 1,\ s = 1$
$\therefore a \times p + b \times q + \dfrac{c}{r} + \dfrac{d}{s}$
$= 2 \times 3 + 3 \times 2 + \dfrac{5}{1} + \dfrac{7}{1}$
$= 6 + 6 + 5 + 7$
$= 24$

28. 자연수 x 를 소인수분해하였을 때의 소인수의 합을 $f(x)$ 라고 정의한다. 즉, $x = a \times a \times b \times b \times c$ (a, b, c 는 소수) 일 때, $f(x) = a + a + b + b + c$ 이다. $f(x) = 15$ 가 되는 세 자리 자연수 x 를 모두 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 105, 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216, 243

해설

15 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11 이다.
(1) x 가 2, 3 의 인수로만 이루어져 있다면, $x = 2^6 \times 3$, $2^3 \times 3^3$, $3^5 \rightarrow x = 192,\ 216,\ 243$
(2) x 가 5 의 인수를 포함한다면, $x = 2^5 \times 5$, $2^2 \times 3^2 \times 5$, $2 \times 3 \times 5^2$, $5^3 \rightarrow x = 160,\ 180,\ 150,\ 125$
(3) x 가 7의 인수를 포함한다면, $x = 2^4 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 7$, $3 \times 5 \times 7 \rightarrow x = 112,\ 126,\ 105$
(4) x 가 11 의 인수를 포함한다면, $x = 2^2 \times 11 \rightarrow x = 44$
∴ 세 자리 자연수 x = 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216, 243

29. $32 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 수 중 20 보다 작은 수의 개수를 구하면?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$32 = 2^5$ 이므로
a 가 될 수 있는 수는 $2 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
따라서 a 가 될 수 있는 20 보다 작은 수는 $2,\ 2^3,\ 2 \times 3^2$, 즉 3 개이다.

30. T, S, L 은 $T \times S \times L = 715$ 을 만족하는 서로 다른 자연수이다. 이 때, $T + S + L$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 29

해설

$715 = 5 \times 11 \times 13$ 이고, 합의 최솟값을 구하므로, T, S, L 는 5, 11, 13 이 된다.

31. 504 를 자연수 a 로 나눈 값이 자연수 b 의 제곱이 될 때, $a+b$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$\frac{504}{a} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{a} = b^2$ 이므로

$a = 2 \times 7,\ 2^3 \times 7,\ 2 \times 3^2 \times 7,\ 504$ 가 가능하다.

$a = 2 \times 7$ 일 때, $b^2 = 6^2$ $\therefore\ b = 6$

$a = 2^3 \times 7$ 일 때, $b^2 = 3^2$ $\therefore\ b = 3$

$a = 2 \times 3^2 \times 7$ 일 때, $b^2 = 2^2$ $\therefore\ b = 2$

$a = 504$ 일 때, $b = 1$

$\therefore\ (a+b$의 최소값$) = 14 + 6 = 20$

32. 약수의 개수가 12 개인 어떤 자연수 n 을 소인수분해하면 $a^x \times b^y (a \neq b)$ 이다. 이러한 자연수 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 72

해설

$a^x \times b^y (a \neq b)$ 가 12 개의 약수를 가지려면,
$(x+1) \times (y+1) = 12$
$\rightarrow (x,\ y) = (1,5),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,1)$
따라서, 이러한 $x,\ y$ 의 값을 만족하는 수 중 가장 작은 수는
$2 \times 3^5,\ 2^2 \times 3^3,\ 2^3 \times 3^2,\ 2^5 \times 3$ 중 하나이다.
$\therefore$ 자연수 n 중에서 가장 작은 수$= 72$

33. $2^4 \times a \times 5^2$ 의 약수가 45 개가 되기 위한 가장 작은 a 의 값은?

① 2　② 3　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$2^4 \times a \times 5^2$ 의 약수의 개수는
$(4+1)\times(a$의 지수$+1)\times(2+1) = 45$ 으로 계산된다. (a의 지수$)+1 = 3$이 되어야 한다.
그러므로 $9 = 3^2$ 이다.