

1. 자연수 $A = 2^2 \times 3^n$ 의 약수의 개수가 24 일 때, n 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 7

④ 8

⑤ 12

해설

$$(2 + 1)(n + 1) = 24$$

$$n + 1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

2. 자연수 $2^3 \times 3^a$ 의 약수의 개수가 12 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(3 + 1)(a + 1) = 12$$

$$a + 1 = 3$$

$$\therefore a = 2$$

3. 자연수 $3^a \times 5^4 \times 7^5$ 의 약수의 개수가 120 이다. 이때, a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(a+1)(4+1)(5+1) = 120$$

$$a+1 = 4$$

$$\therefore a = 3$$

4. 다음은 소희와 동우가 문제를 푼 것이다. 두 사람 중 누가 맞게 풀었는지 고르고, 그 이유를 써라.

문제

$2 \times 3 \times 5^2$ 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 곱할 수 있는 수중 가장 작은 수와 그때 어떤 수의 제곱이 되는지 차례대로 구하여라.

소희의 풀이과정

$2 \times 3 \times 5^2$ 를 계산하면 150이다.
그런데 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 1, 4, 9, 16, ... 등이 있다.
150 근처의 제곱수는 아마도 12가 될 것 같다.
 $12 \times 12 = 144$ 이므로 150이 되려면 150에 $\frac{150}{144}$ 를 곱하면 된다.
따라서 곱할 수 있는 수는 $\frac{150}{144}$ 이고, 12의 제곱이 된다.

동우이의 풀이과정

어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 $2^2, 3^2, 4^2, \dots$ 즉 지수가 2인 수들이다.
따라서 $2 \times 3 \times 5^2$ 의 지수가 2가 되는지 확인하고, 안 되면 곱해 주면 된다.
 $2 \times 3 \times 5^2$ 이므로, 2하고 3만 제곱 형태로 만들어 주면 된다.
 $2 \times 3 \times 5$ 에 2와 3를 곱하면, $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ 가 되어 제곱 형태가 된다.
따라서 곱하는 수는 $2 \times 3 = 6$ 이고, 제곱이 되는 수는 $2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900$ 이므로 30의 제곱이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 풀이참조

해설

경민의 풀이과정이 옳다. 선혜는 곱할 수 있는 수는 자연수라는 조건을 무시했기 때문에 선혜는 틀렸다.

5. $90 \times A = B^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

90 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{) 90}$$

$$3 \overline{) 45}$$

$$3 \overline{) 15}$$

$$5$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $2 \times 3^2 \times 5 \times A = B^2$ 을 만족하는 A 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 5 = 10$ 이다.

6. $\frac{686}{n} = a^2$ 을 만족하는 자연수 a 에 대하여 $a + n$ 의 값을 구하여라.
(단, n 은 조건을 만족하는 최소의 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} 686 &= 2 \times 7^3 \\ n &= 14, \quad a = 7 \\ a + n &= 7 + 14 = 21 \end{aligned}$$

7. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ 9 는 35 의 약수이다.

㉡ 1 은 모든 자연수의 배수이다.

㉢ 6 은 자기 자신이 약수인 동시에 배수이다.

㉣ 392 는 4 의 배수이다.

㉤ 36 의 약수의 개수는 8 개이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉢, ㉣

해설

㉢. 모든 자연수는 자기 자신이 약수인 동시에 배수이다.

㉣. 392 는 4 의 배수이다.

8. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 5 는 5 의 약수이다.
- ② 6 은 6 의 배수이다.
- ③ 1 은 모든 자연수의 약수이다.
- ④ 15 는 15 의 배수인 동시에 약수이다.
- ⑤ 7 은 7 의 약수이지만 배수는 아니다.

해설

모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다. 따라서 ⑤ 이다.

9. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 10 은 10 의 약수이면서 10 의 배수이다.
- ② 모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다.
- ③ 1 은 모든 자연수의 배수이다.
- ④ 384 은 6 의 배수이다.
- ⑤ 9 는 54 의 약수이다.

해설

1 은 모든 자연수의 약수이다.

10. 1에서 100까지의 자연수를 다음과 같이 연속한 세 개의 수씩 묶어 차례로 늘어놓았다.

(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), ..., (98, 99, 100)

이

때, 세 수의 합이 21의 배수인 것은 모두 몇 묶음인지 구하면?

- ① 12
- ② 13
- ③ 14
- ④ 15
- ⑤ 16

해설

연속하는 세 개의 자연수를
 $(a-1, a, a+1)$ ($2 \leq a \leq 99$)라 하면,
 $(a-1) + (a) + (a+1) = (21 \text{의 배수})$
 $\Rightarrow 3a = (21 \text{의 배수})$
 $\Rightarrow a = (7 \text{의 배수})$
 $\therefore 2 \leq a \leq 99$ 일 때, 7의 배수는 14개

11. 연속하는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 가 15 의 배수가 되는 순서쌍 (a, b, c) 는 모두 몇 개인지 구하여라.(단, $a \leq 100$)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 20 개

해설

$b = a + 1, c = a + 2$ 이므로,
 $a + (a + 1) + (a + 2) = 15k$
 $\rightarrow 3a = 15k - 3 \rightarrow a = 5k - 1 \rightarrow a$ 는 5 로 나누어서 나머지가 4 인 수이다.
 $a \leq 100$ 일 때, a 의 개수는 20 개이다.
 $\therefore$ 순서쌍 (a, b, c) 의 개수=20 개

12. 120보다 작은 7의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 17개

해설

$$120 \div 7 = 17.14 \dots$$

$$\text{즉, } 7 \times 1 = 7, 7 \times 2 = 14, \dots, 7 \times 17 = 119$$

13. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.
 $\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$

14. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5 \times a = 7 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 값으로 가능하지 않은 것은?

- ① 35 ② 70 ③ 105 ④ 140 ⑤ 180

해설

$5 \times a = 7 \times b = c^2$ 에서
i) $a = 5 \times 7^2$, $b = 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (5 \times 7^2) = 7 \times (5^2 \times 7) = (5 \times 7)^2 = 35^2$
ii) $a = 2^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (2^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (2^2 \times 5^2 \times 7) = (2 \times 5 \times 7)^2 = 70^2$
iii) $a = 3^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (3^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (3^2 \times 5^2 \times 7) = (3 \times 5 \times 7)^2 = 105^2$
iv) $a = 4^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 4^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (4^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (4^2 \times 5^2 \times 7) = (4 \times 5 \times 7)^2 = 140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 35, 70, 105, 140, ... 이다.

15. 315 에 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되도록 하려고 한다. 제곱이 되도록 하기 위해서 곱하는 수 중 첫 번째로 작은 수와 세 번째로 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

▷ 정답 : 315

해설

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$
 $315 \times n = 3^2 \times 5 \times 7 \times n = x^2$ 에서
 $n = 5 \times 7 \times k^2$ 꼴이므로
 n 을 작은 순으로 3 개 써 보면
 $n = 5 \times 7 \times 1^2 = 35$
 $n = 5 \times 7 \times 2^2 = 140$
 $n = 5 \times 7 \times 3^2 = 315$
 $\therefore 35, 315$

16. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?
- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

2) 252

2) 126

3) 63

3) 21

7

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값
중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

17. 자연수 $2^a \times 3^b$ 에 24 를 곱하였더니 어떤 자연수의 제곱이 되었다. 이때, 가능한 a, b 중 가장 작은 a, b 를 올바르게 구한 것을 골라라.

- ① $a : 0, b : 0$
- ② $a : 0, b : 1$
- ③ $a : 1, b : 1$
- ④ $a : 1, b : 0$
- ⑤ $a : 2, b : 1$

해설

$2^a \times 3^b$ 이 자연수이려면 a 와 b 는 0 이상이어야 한다.
또, 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 소인수분해를 했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서, $2^a \times 3^b$ 에 $24 = 2^3 \times 3$ 를 곱한 수가 어떤 자연수의 제곱이 되어야 하므로, $2^a \times 3^b \times 2^3 \times 3 = 2^a \times 2^3 \times 3^b \times 3 = 2^{a+3} \times 3^{b+1}$ 에서 2 의 지수인 $(a+3)$ 과 3 의 지수인 $(b+1)$ 이 모두 짝수여야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 수 a, b 는 각각 1 과 1 이다.

18. 자연수 a, b, c 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 101

해설

$120a = 2^3 \times 3 \times 5 \times a,$
 $270b = 2 \times 3^3 \times 5 \times b,$
 $150c = 2 \times 3 \times 5^2 \times c$ 이므로
 a, b, c 가 가장 작아지는 값은
 $120a = 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ 이다.
 $\rightarrow a = 45, b = 20, c = 36$
 $\therefore a + b + c = 101$

19. 자연수 140 을 소인수분해했더니 $2^a \times b \times c$ 이고 약수의 개수는 d 개이다. $d - b - c + a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$ 이므로

약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

$a = 2, b = 5, c = 7, d = 12$

$\therefore d - b - c + a = 2$

20. 자연수 120 을 소인수분해했더니 $2^a \times b \times c$ 이고 약수의 개수는 d 개이다. $a + b + c + d$ 의 값은?

① 27 ② 16 ③ 29 ④ 18 ⑤ 21

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 $a = 3, b = 3, c = 5$,
약수의 개수 $d = (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 16$
 $\therefore a + b + c + d = 27$

21. 자연수 a 의 약수의 개수를 $n(a)$ 로 나타낼 때, $n(240) \div n(162) \times n(x) = 20$ 을 만족시키는 자연수 x 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$, $162 = 2 \times 3^4$ 에서
 $n(240) = (4 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 20$
 $n(162) = (1 + 1) \times (4 + 1) = 10$
 $n(240) \div n(162) \times n(x) = 20$
 $20 \div 10 \times n(x) = 20$
 $\therefore n(x) = 10$
 $10 = 5 \times 2 = (4 + 1)(1 + 1)$ 이므로
가장 작은 $x = 2^4 \times 3 = 48$
 $\therefore 48$

22. $a \times 3^4$ 은 약수의 개수가 15개인 수 중 가장 작은 홀수라고 한다. 이때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$15 = 5 \times 3 = (4 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^4 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$

23. 서로 다른 한 자리 소수 a, b, c 에 대하여 $a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 3 을 곱하였더니 약수의 개수가 2 배가 되었다. 이때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

a, b, c 중 3이 있는 경우
 $a = 3$ 이라 하면
 $2(l+1)(m+1)(n+1) = (l+2)(m+1)(n+1)$
 $2l+2 = l+2, l = 0$
 l, m, n 은 1 이상인 자연수이므로 a, b, c 중에 3은 없다.
 a, b, c 는 한 자리 소수 2, 3, 5, 7 중에서 3이 아니므로 2, 5, 7 이다.
 $\therefore 2 + 5 + 7 = 14$

24. $A = 3^5 \times \square$ 의 약수가 18 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 최소의 자연수는?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$A = 3^5 \times \square$ 에서

약수의 개수가 18 개이면 $\square$ 가 가장 작은 소인수 2 일 때

$\square = 2^2 = 4$