1. 네 자리 수 68□0 이 6 의 배수일 때, □안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 4

▷ 정답: 7

해설

6 은 2 와 3 의 배수이다.
일의 자리가 0 이므로 2 의 배수이고 3 의 배수이려면 6+8+□+0 이 3 의 배수이어야 한다.
∴ □ = 1, 4, 7

2. 연속하는 세 자연수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a+b+c$ 가 15 의 배수가 되는 순서쌍 (a,b,c) 는 모두 몇 개인지 구하여라.(단, $a \le 100$)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 20 개

해설

$b=a+1, c=a+2$ 이므로,
$a+(a+1)+(a+2)=15k$
$\rightarrow 3a=15k-3 \rightarrow a=5k-1 \rightarrow a$ 는 5 로 나누어서 나머지가 4 인 수이다.
$a \le 100$ 일 때, a 의 개수는 20 개이다.
$\therefore$ 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수=20 개

3. 110 보다 작은 8 의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13 개

해설

$110 \div 8 = 13.75$

즉, $8 \times 1 = 8,\ 8 \times 2 = 16,\ \cdots,\ 8 \times 13 = 104$

4. 자연수 x, y 에 대하여 $\dfrac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

① $1, 4$ ② $4, 5$ ③ $5, 20$

④ $4, 5, 20$ ⑤ $1, 2, 4, 5, 20$

해설

$\dfrac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 $5, 5 \times 2^2$ 이다.

5. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

6. $315 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 두 번째로 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 140

해설

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로
a 가 될 수 있는 수는 $5 \times 7 \times$ (자연수)^2 의 꼴이다.
따라서, a 가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 $5 \times 7 \times 1^2 = 35$ 이고, 두 번째 작은 자연수는
$5 \times 7 \times 2^2 = 140$ 이다.

7. 자연수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립할 때, $a+b+c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 101

해설

$120a = 2^3 \times 3 \times 5 \times a$,
$270b = 2 \times 3^3 \times 5 \times b$,
$150c = 2 \times 3 \times 5^2 \times c$ 이므로
$a,\ b,\ c$ 가 가장 작아지는 값은
$120a = 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ 이다.
$\rightarrow a = 45, b = 20, c = 36$
$\therefore a + b + c = 101$

8. 자연수 a, b, c 에 대하여 $12 \times a = 5 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

12 를 소인수분해하면 $2^2 \times 3$ 이므로 $2^2 \times 3 \times a = 5 \times b = c^2$ 이다
c 가 최소이므로 $a = 3 \times 5^2$, $b = 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이어야 한다.
$2^2 \times 3 \times (3 \times 5^2) = 5 \times (5 \times 2^2 \times 3^2) = (2 \times 3 \times 5)^2$
따라서 c 의 최솟값은 30 이다

9. 300 을 가장 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$300 \div a = b^2$ 에서
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
$a = 3$
$2^2 \times 3 \times 5^2 \div 3 = b^2$
$2^2 \times 5^2 = b^2$
$b = 2 \times 5 = 10$
$\therefore a + b = 13$

10. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

① 200 ② 2×5^3 ③ $3^2\times7^2$

④ 150 ⑤ $3^2\times11^2\times13$

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.
① $200=2^3\times5^2$ 이므로 $(3+1)\times(2+1)=12$ (개)이다.
② $(1+1)\times(3+1)=8$ (개)
③ $(2+1)\times(2+1)=9$ (개)
④ $150=2\times3\times5^2$ 이므로 $(1+1)\times(1+1)\times(2+1)=12$ (개)이다.
⑤ $(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=18$ (개)

11. 180 과 약수의 개수가 다른 수는?

① 210 ② 300 ③ 2450 ④ 700 ⑤ 1575

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로
약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$ (개)
① $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ 이므로 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)
② $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $3 \times 2 \times 3 = 18$ (개)
③ $2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$ 이므로 $2 \times 3 \times 3 = 18$ (개)
④ $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 이므로 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (개)
⑤ $1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 이므로 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (개)

12. 100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 10 개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로
$1^2, 2^2, \cdots, 10^2$ 의 10 개가 있다.

13. $27\times\square$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다. $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 2 ② 2^2 ③ 2^3 ④ 3 ⑤ 3^2

해설

$3^3\times\square$에서 $\square=a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1)\times(x+1)=12$ (개) 이므로

$(3+1)\times(x+1)=4\times(x+1)=12$

$x+1=3$ $\therefore\ x=2$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$\square=2^2$

14. 자연수 약수의 개수가 9 개인 어떤 수를 소인수분해했더니 $2^2 \times \square$ 가 되었다. $\boxed{\quad}$안에 들어갈 가장 작은 수는 무엇인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$

i) $9 = 8 + 1$

$2^2 \times \square = 2^8$

$\therefore \square = 2^6$

ii) $9 = 3 \times 3 = (2+1) \times (2+1)$ 일 때,

$2^2 \times \square = 2^2 \times a^2$ (단,a 는 2 가 아닌 소수이다.)

$\therefore a = 3,\ 5,\ 7, \cdots$

$\therefore \square = 9, 25, 49$

i), ii) 에서 가장 작은 수는 9 이다.

15. $a \times 3^4$ 은 약수의 개수가 15 개인 수 중 가장 작은 홀수라고 한다. 이때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 25

해설

$15 = 5 \times 3 = (4+1) \times (2+1)$
$3^4 \times a$ 가 홀수이므로
a 는 3 보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$