

1. 네 자리 수 $68\square 0$ 이 6의 배수일 때, \square 안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 7

해설

6은 2와 3의 배수이다.

일의 자리가 0이므로 2의 배수이고 3의 배수이려면 $6+8+\square+0$ 이 3의 배수이어야 한다.

$\therefore \square = 1, 4, 7$

2. 연속하는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 가 15 의 배수가 되는 순서쌍 (a, b, c) 는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, $a \leq 100$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 20개

해설

$b = a + 1, c = a + 2$ 이므로,

$$a + (a + 1) + (a + 2) = 15k$$

$\rightarrow 3a = 15k - 3 \rightarrow a = 5k - 1 \rightarrow a$ 는 5 로 나누어서 나머지가 4 인 수이다.

$a \leq 100$ 일 때, a 의 개수는 20 개이다.

\therefore 순서쌍 (a, b, c) 의 개수=20 개

3. 110보다 작은 8의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13개

해설

$$110 \div 8 = 13.75$$

즉, $8 \times 1 = 8$, $8 \times 2 = 16$, \dots , $8 \times 13 = 104$

4. 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

① 1, 4

② 4, 5

③ 5, 20

④ 4, 5, 20

⑤ 1, 2, 4, 5, 20

해설

$\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 $5, 5 \times 2^2$ 이다.

5. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100

② 200

③ 300

④ 400

⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

6. $315 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 두 번째로 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 140

해설

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로

a 가 될 수 있는 수는 $5 \times 7 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

따라서, a 가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 $5 \times 7 \times 1^2 = 35$

이고, 두 번째 작은 자연수는

$5 \times 7 \times 2^2 = 140$ 이다.

7. 자연수 a, b, c 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 101

해설

$$120a = 2^3 \times 3 \times 5 \times a,$$

$$270b = 2 \times 3^3 \times 5 \times b,$$

$$150c = 2 \times 3 \times 5^2 \times c \text{ 이므로}$$

a, b, c 가 가장 작아지는 값은

$$120a = 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \text{ 이다.}$$

$$\rightarrow a = 45, b = 20, c = 36$$

$$\therefore a + b + c = 101$$

8. 자연수 a, b, c 에 대하여 $12 \times a = 5 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

12 를 소인수분해하면 $2^2 \times 3$ 이므로 $2^2 \times 3 \times a = 5 \times b = c^2$ 이다
 c 가 최소이므로 $a = 3 \times 5^2$, $b = 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이어야 한다.

$$2^2 \times 3 \times (3 \times 5^2) = 5 \times (5 \times 2^2 \times 3^2) = (2 \times 3 \times 5)^2$$

따라서 c 의 최솟값은 30 이다

9. 300 을 가장 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$300 \div a = b^2 \text{ 에서}$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$a = 3$$

$$2^2 \times 3 \times 5^2 \div 3 = b^2$$

$$2^2 \times 5^2 = b^2$$

$$b = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore a + b = 13$$

10. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

① 200

② 2×5^3

③ $3^2 \times 7^2$

④ 150

⑤ $3^2 \times 11^2 \times 13$

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

① $200 = 2^3 \times 5^2$ 이므로 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개) 이다.

② $(1 + 1) \times (3 + 1) = 8$ (개)

③ $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$ (개)

④ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개) 이다.

⑤ $(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)

11. 180 과 약수의 개수가 다른 수는?

① 210

② 300

③ 2450

④ 700

⑤ 1575

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로

약수의 개수는 $(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)

① $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ 이므로 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)

② $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $3 \times 2 \times 3 = 18$ (개)

③ $2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$ 이므로 $2 \times 3 \times 3 = 18$ (개)

④ $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 이므로 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (개)

⑤ $1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 이므로 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (개)

12. 100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 10 개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로 $1^2, 2^2, \dots, 10^2$ 의 10 개가 있다.

13. $27 \times \square$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다. \square 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 2

② 2^2

③ 2^3

④ 3

⑤ 3^2

해설

$3^3 \times \square$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1) \times (x+1) = 12$ (개) 이므로

$$(3+1) \times (x+1) = 4 \times (x+1) = 12$$

$$x+1 = 3 \quad \therefore x = 2$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^2$$

14. 자연수 약수의 개수가 9 개인 어떤 수를 소인수분해했더니 $2^2 \times \square$ 가 되었다. 안에 들어갈 가장 작은 수는 무엇인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$$

$$\text{i) } 9 = 8 + 1$$

$$2^2 \times \square = 2^8$$

$$\therefore \square = 2^6$$

ii) $9 = 3 \times 3 = (2 + 1) \times (2 + 1)$ 일 때,

$$2^2 \times \square = 2^2 \times a^2 \quad (\text{단, } a \text{ 는 } 2 \text{ 가 아닌 소수이다.})$$

$$\therefore a = 3, 5, 7, \dots$$

$$\therefore \square = 9, 25, 49$$

i), ii) 에서 가장 작은 수는 9 이다.

15. $a \times 3^4$ 은 약수의 개수가 15개인 수 중 가장 작은 홀수라고 한다. 이때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$15 = 5 \times 3 = (4 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^4 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$