1. 다항식 $2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나눈 나머지는?

① $x-1$ ② x ③ 1

④ $x+3$ ⑤ $3x-1$

해설

직접 나누어보면

$$(2x+1)+\frac{x-1}{x^2+1}$$

몫 : $2x+1$, 나머지 : $x-1$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x-2$로 나누어 떨어지고 또, $x-3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x-2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

3. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1 ② $1+2i$ ③ $1-2i$

④ -1 ⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

4. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ　④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

5. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

6. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

7. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),

$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

8. 방정식 $x^6 - 1 = 0$의 해가 <u>아닌</u> 것은?

① -1 ② 1 ③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=-1,\ 1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

9. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

10. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+2y=8 \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=9 \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=5 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $y=3$

▷ 정답 : $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $x+2y+3z=11 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣ − ㉠에서 $3z=3 \quad \therefore z=1$

㉣ − ㉡에서 $x=2$

㉣ − ㉢ 에서 $y=3$

11. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　② $2^{32}+1$　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$P=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= \qquad \vdots$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$

12. $(m^2-4)x-1=m(3x+1)$를 만족하는 x가 없도록 하는 상수 m의 값은?

① -1 ② -2 ③ -4 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(m^2-3m-4)x-1-m=0$의 해가 없으므로
$m^2-3m-4=0$ 이고 $-m-1\neq 0$
$\therefore m=4$

13. $x-y=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=x-1$을 준식에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a+b+c)x^2-(b+2c)x+c-1=0$
x에 대한 항등식이므로
$a+b+c=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$
$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

14. 다항식 $(x+3)^4-6(x+3)^2+8$을 인수분해 하면 $(x+1)(x+5)g(x)$일 때, $g(-1)g(1)$의 값으로 옳은 것은?

① 28　② 26　③ 24　④ 14　⑤ 12

해설

$A=(x+3)^2$로 치환하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} A^2-6A+8 &= (A-4)(A-2) \\ &= \left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+7\right) \\ &= (x+1)(x+5)(x^2+6x+7) \\ &= (x+1)(x+5)g(x) \end{aligned}$$

따라서, $g(x)=x^2+6x+7$

$\therefore\ g(-1)\times g(1)=2\times 14=28$

15. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

a, b, c는 실수이므로

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

16. $(2^{48}-1)$은 60 과 70 사이의 어떤 두 수로 나누어 떨어진다. 이 두 수는?

① 61, 63 ② 61, 65 ③ 63, 65

④ 63, 67 ⑤ 67, 69

해설

$$2^{48}-1=(2^6-1)(2^6+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)$$
$$=63\cdot 65\cdot(2^{12}+1)(2^{24}+1)$$

따라서 $2^{48}-1$은 63과 65로 나누어 떨어진다.

17. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3 개

18. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서

i) $x<2$일 때,

$-(x-2)-(x-3)=1$

$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)

ii) $2\le x<3$일 때,

$(x-2)-(x-3)=1$

$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)

iii) $x\ge 3$일 때,

$(x-2)+(x-3)=1$

$\therefore\ x=3$

19. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

20. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$D/4=4k^2-(5-k^2)\geq 0$$
$$4k^2-5+k^2\geq 0,\ 5k^2\geq 5,\ \therefore k^2\geq 1$$
$$\alpha+\beta=4k,\quad \alpha\beta=5-k^2$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= 16k^2-10+2k^2\\ &= 18k^2-10\end{aligned}$$
$$18k^2\geq 18,\ 18k^2-10\geq 18-10$$
$$\alpha^2+\beta^2\geq 8,\ \therefore (\text{최솟값})=8$$

21. 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 $2\alpha,\ 3\alpha$라 하면

$2\alpha+3\alpha=5\alpha=k-1\quad\cdots\cdots$ ㉠

$(2\alpha)(3\alpha)=6\alpha^2=k\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{k-1}{5}$,

이것을 ㉡에 대입하면 $6k^2-37k+6=0$

$\therefore\ k=6,\ \dfrac{1}{6}$

22. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$　　② $x^2-3x+4=0$

③ $x^2+6x+5=0$　　④ $x^2+4x+5=0$

⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α,β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

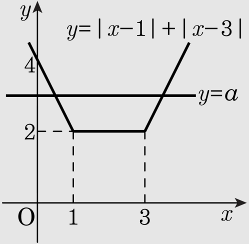
23. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



24. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t - 1$, $y = 5t + 3$, $z = 3t - 2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$

25. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1　② ω　③ $-\omega$　④ 2ω　⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$