1. $x+y+(2x-y)i=2+7i$를 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $xy=-3$

해설

$x+y=2,\ 2x-y=7$

$\therefore x=3,\ y=-1$

$\therefore xy=-3$

2. 복소수 $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\dfrac{2+3i}{1-i} = \dfrac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1+5i}{2}$

$\therefore\ a+b = \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{5}{2} = 2$

3. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0　② 3　③ $7 - 2i$　④ $7 - i$　⑤ $7 + i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1 + i)(1 - i) + (1 + i)(2 + i) + (1 - i)(2 - i) + (1 - i)(2 + i)$

$= (1 + 1) + (2 - 1 + 3i) + (2 - 1 - 3i) + (2 + 1 - i)$

$= 7 - i$

4. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$ ② $-\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{15}i$
④ $-\sqrt{15}i$ ⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

5. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$
순허수이므로 $2a^2+a-6=0$
$\Rightarrow\ (a+2)(2a-3)=0$
$\Leftrightarrow\ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=2$이면,
$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

6. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ -3

해설
$x + y = 2,\ xy = 3$
$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

7. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

ㄴ $z + \bar{z}$는 실수이다.

ㄷ $z - \bar{z}$는 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
ㄱ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)
ㄴ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)
ㄷ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$
$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.
ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$
$= (a+1+bi)(a+1-bi)$
$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

8. $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-3}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$　② $-1-\sqrt{2}$　③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-(3-2\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1) \times (-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

9. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면
$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$
실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0 \therefore x=-3, \ -1$
순허수가 되기 위해서는
$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$
$x=-1, \ 2$이고 $x\neq -3, \ -1 \therefore x=2$
$(-3)\times(-1)\times 2=6$

10. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

11. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

12. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

13. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 2$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8 - 12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

14. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\dfrac{w}{w+1} + \dfrac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$ 의 값은? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\dfrac{7}{10}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

해설

$\overline{w} = 2 + i$

$$\frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$$
$$= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i}$$
$$= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$= \frac{14}{10}$$
$$= \frac{7}{5}$$

해설

$\omega + \overline{\omega} = 4, \omega\overline{\omega} = 5$

$$\frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1} = \frac{2\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega}}{\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega} + 1} = \frac{10+4}{5+4+1} = \frac{7}{5}$$

15. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$
$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$
$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$
$\therefore\ a = -2, b = -4$
$\therefore\ a + b = -6$

16. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$

$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

17. 자연수 n에 대해 $x=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2}\right\}^{n}+\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2}\right\}^{n}$$
$$=\left(\frac{2}{2i}\right)^{n}+\left(\frac{2}{-2i}\right)^{n}$$
$$=\left(\frac{1}{i}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{i}\right)^{n}=(-i)^{n}+i^{n}$$

i^n 은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n=4k$ 이면 $x=1+1=2$

(ii) $n=4k+1$ 이면 $x=-i+i=0$

(iii) $n=4k+2$ 이면 $x=-1-1=-2$

(iv) $n=4k+3$ 이면 $x=i-i=0$

$\therefore\ x=2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

18. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

㉠ $f(z) \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \overline{w})$

$= z\bar{z} + z\overline{w} + w\bar{z} + w\overline{w}$

$\neq z\bar{z} + w\overline{w} = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \overline{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\overline{w} = f(z)f(w)$

19. 복소수 $z = a + bi$ $(a, b$: 실수$)$ 에 대하여 $< z >= b + ai$로 나타낸다.

$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 < z >^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$ ② $4 + 3i$ ③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$ ⑤ $4 + 5i$

해설

$z < z >= (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$

$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로

$z < z >= \left\{ \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5z^5 < z >^4 &= 5z(z < z >)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

20. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$　　② $-i$　　③ i

④ -1　　⑤ 1

해설

$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$

$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$

$= -x^2 - x - 1 \ (\because \ x^2 + 2x + 2 = 0)$

$= -(-2x - 2) - x - 1$

$= x + 1 = i$