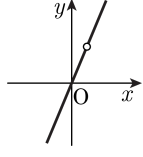
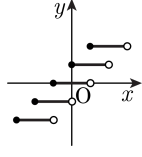


1. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x 에서 y 로의 함수인 것은?

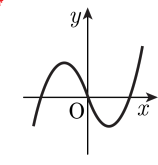
①



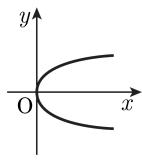
②



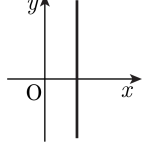
③



④



⑤



해설

①은 대응되지 못하는 x 의 값이 존재하고
②, ④, ⑤는 x 의 한 값에
 y 의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

2. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

3. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}}$ 을 계산하면?

- ① $-\frac{1}{a}$ ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{a}$ ⑤ $a-1$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}} &= 1 - \frac{1}{\frac{1-a}{1-a}} \\ &= 1 - \frac{1-a}{-a} = \frac{a+1-a}{a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

4. $x : y = 4 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x : y = 4 : 3$$

$$3x = 4y$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}y$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{16}{9}y^2 + \frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2 - y^2} = \frac{28}{7} = 4$$

해설

$$x : y = 4 : 3 \Rightarrow x = 4k, y = 3k$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{16k^2 + 12k^2}{16k^2 - 9k^2} = \frac{28k^2}{7k^2} = 4$$

5. 유리수 a, b 가 등식 $(a + \sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$$

무리수의 상등에 의하여

$$\text{유리수 부분 : } (a^2 + 2) = 6, a^2 = 4$$

$$\text{무리수 부분 : } 2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}, 2a = b$$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, ab = 8 \\ a = -2, b = -4, ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$$\therefore ab = 8$$

6. 곡선 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x = a$, $y = b$ 이다. $m + n + a + b$ 의 값은?

① 6 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$y = \frac{6}{x} \text{ 의 그래프를}$$

x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{따라서 } m = 3, n = 1$$

$$\text{또, } y = \frac{3x-1}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

$$\text{점근선은 } x = -1, y = 3 \quad a = -1, b = 3$$

따라서 구하는 합은 6

7. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b = 4 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

8. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(f(x)) = 4x - 9$, $f(f(f(x))) = 8x - 21$ 이므로
 $4x - 9 = 8x - 21$
 $\therefore x = 3$

9. 두 함수 $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $(g \circ f)(2) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} (g \circ f)(2) + (g \circ f)(3) &= g(f(2)) + g(f(3)) \\ &= g(-1) + g(4) \\ &= (-1)^2 + 2 \times 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

10. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값은

$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

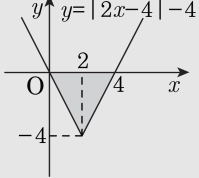
(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



11. $x \neq 3, x \neq 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{3x-19}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5}$
가 항상 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② 3 ③ 7 ④ 10 ⑤ 15

해설

우변을 정리하여 좌변의 계수와 비교한다.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5} &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{x^2 - 8x + 15}\end{aligned}$$

$$3x - 19 = (a-b)x + (-5a+3b)$$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 5a-3b=19 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=2$$

$$\therefore a+b=7$$

12. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0$, $3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

13. $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$ 를 만족하는 서로 다른 양수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 는? (단, $x+y \neq 0$)

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{3}{5}$
- ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{5}{3}$
- ⑤ 2

해설

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ 이고

$b+d+f \neq 0$ 이면 $\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$ ($\because$ 가비의 리)

이것을 이용하면

$\frac{x}{y} = \frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y} = \frac{2(x+y)}{x+y} = 2$

14. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2. \times \times \dots$$

$$\therefore x = 2, y = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$(x + 2y)^2 = (2 + 2(\sqrt{3} - 1))^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

15. 함수 $y = \frac{ax+b}{2x+c}$ 가 점 (1,2) 를 지나고 점근선이 $x = 2, y = 1$ 일 때,
 $a + b + c$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{k}{x-2} + 1$$

또 점 (1,2)를 지나므로

$$2 = \frac{k}{1-2} + 1 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{-1}{x-2} + 1 = \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{2x-4}$$

$$\therefore a = 2, b = -6, c = -4$$

$$\therefore a + b + c = -8$$

16. $y = -\sqrt{4-2x} + 1$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.
- ② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.
- ③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{2x}$ 와 겹쳐진다.
- ④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ⑤ 이 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 에서 만난다.

해설

- ③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{-2x}$ 와 겹쳐진다.
- ④, ⑤ 꼭지점이 $(2, 1)$ 이고 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

$\therefore 1, 3, 4$, 분면을 지난다.

17. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & (n \geq 100 \text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n < 100 \text{일때}) \end{cases} \quad \text{에서 } f(96) \text{의 값을 구하면?}$$

- ① 78 ② 80 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} f(96) &= f(f(100)), \quad f(100) = 98, \\ f(98) &= f(f(102)), \quad f(102) = 100 \\ \therefore f(96) &= 98 \end{aligned}$$

18. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1, x \geq 1, x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따 라 서, $f(x) = |x^2 - 1| =$

$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$

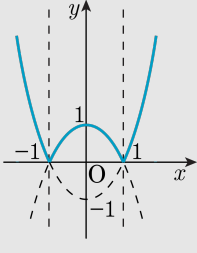
$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.



19. $g(x) = 2 + \frac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은? (단, f^{-1}, g^{-1} 은 $f(x), g(x)$ 의 역함수)

① $\frac{2x-3}{x+2}$
④ $\frac{x+2}{2x-3}$

② $\frac{x-2}{2x+3}$
⑤ $\frac{x-2}{2x-3}$

③ $\frac{2x+3}{x-2}$

해설

$$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = g\{f(x)\}$$

$$\therefore g\{f(x)\} = 2 + \frac{7}{f(x)-2} = x$$

$$\rightarrow \frac{7}{f(x)-2} = x-2$$

$$\rightarrow 7 = \{f(x)-2\}(x-2)$$

$$\rightarrow 7 = xf(x) - 2f(x) - 2x + 4$$

$$\rightarrow 2x + 3 = f(x)(x-2)$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

해설

$$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = x \text{ 에서}$$

$$f(x) = g^{-1}(x)$$

$$g(x) = 2 + \frac{7}{x-2} \text{ 에서 역함수를 구하기 위해 } x, y \text{ 를 바꾸면}$$

$$x = 2 + \frac{7}{y-2}, (x-2)(y-2) = 7$$

$$y-2 = \frac{7}{x-2}, y = \frac{7}{x-2} + 2 = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

20. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x-9 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합을 구하여라. (단, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -18

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$2x - 9 = x$ 에서 $x = 9$

$\frac{2}{3}x - 9 = x$ 에서 $x = -27$

따라서, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합은

$9 + (-27) = -18$

21. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

㉠ $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

㉡ $\frac{\sqrt{5}-1}{12}$

㉢ $\frac{10-\sqrt{2}}{20}$

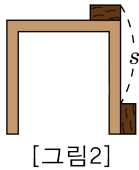
㉣ $\frac{16-\sqrt{5}}{30}$

㉤ $\frac{\sqrt{30}-1}{2}$

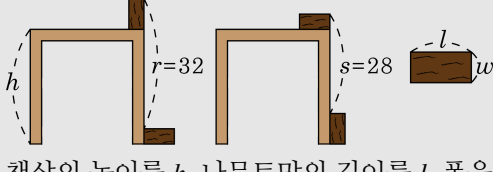
해설

$\sqrt{2} = \sqrt{1} \times \sqrt{2}$, $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, $\dots$, $\sqrt{30} = \sqrt{5} \times \sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5} \times \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} = \frac{6-\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

22. 탁자의 높이를 재기 위하여 그림과 같이 크기가 같은 2개의 나무블럭을 쌓아 보았더니 [그림1]의 높이 r 은 32이었고, [그림2]의 높이 s 는 28이었다. 이 탁자의 높이는?
- 
- ① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설



책상의 높이를 h , 나무토막의 길이를 l , 폭을 w 라 하자.
 $l + h - w = 32$, $w + h - l = 28$
두 식을 더하면 $2h = 60$
 $\therefore h = 30$

23. $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $x^4 - 4x^3 + 4x + 5$ 의 값은?

① -2

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 9

해설

$$x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore x - 2 = -\sqrt{3}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = -1$$

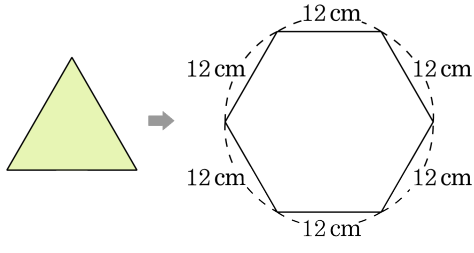
$$x^4 - 4x^3 + 4x + 5 = x^2(x^2 - 4x) + 4x + 5$$

$$= -x^2 + 4x + 5$$

$$= -(x^2 - 4x) + 5$$

$$= 1 + 5 = 6$$

24. 한 변의 길이가 6 cm 인 정삼각형 모양의 타일을 붙여서 다음과 같은 모양을 만들려고 합니다. 정삼각형 타일은 몇 개가 필요하겠는지 구하시오.

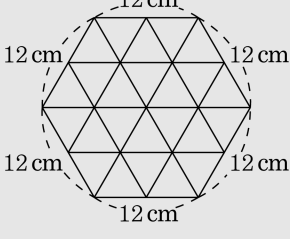


▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

종이로 정삼각형을 만들어 붙여 봅니다.



25. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$ 로 정의 한다.

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 이므로

$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.

즉, $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$

이 식에 $x = 4$ 를 대입하면

$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\therefore f(4) = 24$

26. 함수 $f(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f \circ f \circ f = f^3$, $\dots$, $f \circ f \circ \dots \circ f = f^n$ 이라 할 때, $f^{10}(1)$ 의 값은?

- ① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2047 ⑤ 2048

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3 \\(f \circ f \circ f)(x) &= (f \circ (f \circ f))(x) = f((f \circ f)(x)) = f(4x + 3) = \\&2(4x + 3) + 1 = 8x + 7\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\therefore f^{10}(x) = 2^{10}x + (2^{10} - 1) = 1024x + 1023$$

$$\therefore f^{10}(1) = 1024 \times 1 + 1023 = 2047$$

27. 두 함수 f 와 g 는 서로 역함수 관계이고 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 $g(xy)$ 를 $g(x), g(y)$ 로 나타내면? (단, $f(1) = 4$)

① $g(xy) = g(x) + g(y)$

② $g(xy) = g(x) + g(y) + 1$

③ $g(xy) = g(x)g(y)$

④ $g(xy) = g(x)g(y) + 1$

⑤ $g(xy) = 2g(x)g(y)$

해설

$g(x) = a, g(y) = b$ 라 하면 f 가 g 의 역함수이므로 $x = f(a), y = f(b)$

$$xy = f(a)f(b) = 2f(a+b)$$

$$\therefore \frac{xy}{2} = f(a+b)$$

$$\therefore g\left(\frac{xy}{2}\right) = a+b = g(x) + g(y)$$

$$\text{그런데 } g(xy) = g(x) + g(2y) = g(x) + g(y) + g(4)$$

$$f(1) = 4 \text{ 이므로 } g(4) = 1$$

$$\therefore g(xy) = g(x) + g(y) + 1$$

28. a, b, c 가 실수일 때, $a + b = 4ab$, $b + c = 6bc$, $c + a = 8ca$ 이다.
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 값을 구한 것은?

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ 9 ④ 18 ⑤ 1

해설

준식을 변형하면 $\frac{a+b}{ab} = 4 \dots ①$

$$\frac{b+c}{bc} = 6 \dots ②$$

$$\frac{c+a}{ca} = 8 \dots ③ \text{에서}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 4 \dots ①'$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} = 6 \dots ②'$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{a+c}{ca} = 8 \dots ③'$$

①' + ②' + ③' 하면

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 18$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9$$

29. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2$ 일 때, $\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}}$ 의 값

은?

- ① $-1 + \sqrt{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$
- ④ 1

⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 4$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = 2 \text{이므로}$$

$$x + 2 = 4$$

$$\therefore x = 2$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \text{의 값을 } a \text{라 하면}$$

$$\frac{1}{2 + a} = a, a(2 + a) = 1, a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a = -1 + \sqrt{2}$$

30. 두 실수 a, b 에 대하여 $a + b = \sqrt{7\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $a - b = \sqrt{7\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ 가 성립할 때, $a^2 + ab + b^2$ 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5} + \sqrt{3}$

② $5\sqrt{5} + \sqrt{3}$

③ $5\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2} \{ (a+b)^2 + (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4} \{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = 5\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

31. 세 집합 $A = \{(x, y) \mid y = m(x + 1) - 1, m \text{은 실수}\}$ $B = \{(x, y) \mid y = \left| \frac{1}{x-1} + 2 \right|, x \neq 1 \text{인 실수}\}$
 $C = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-n} + 2, x \geq n \text{인 실수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$ 이기 위한 m 의 범위는 $\textcircled{\text{㉠}} n(B \cap C) = 2$ 이기 위한 n 의 범위는 $\textcircled{\text{㉡}}$ 이다.
빈 칸에 들어갈 값으로 알맞게 짝지은 것은?

- ① $\textcircled{\text{㉠}} m \geq \frac{1}{2}$

$\textcircled{\text{㉡}} n \geq 1$

② $\textcircled{\text{㉠}} m \geq \frac{3}{2}$

$\textcircled{\text{㉡}} n < 1$
- ③ $\textcircled{\text{㉠}} m > \frac{2}{3}$

$\textcircled{\text{㉡}} n \geq \frac{3}{4}$

④ $\textcircled{\text{㉠}} m > \frac{2}{3}$

$\textcircled{\text{㉡}} n \leq \frac{3}{4}$
- ⑤ $\textcircled{\text{㉠}} m \geq \frac{2}{3}$

$\textcircled{\text{㉡}} n < \frac{3}{4}$

해설

㉠: 그림처럼, ㉠보다 위에 있을 때 교점이 3개 이다.

$0 = m\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 1$ 에서 $m = \frac{2}{3}$

$\therefore m$ 의 범위는 $m > \frac{2}{3}$

㉡: 그림의 ㉡보다 왼쪽에 있을 때 교점이 2개 이다.

$y = 2$ 일 때의 교점은 $2 = \left| \frac{1}{x-1} + 2 \right|$

에서

$\left(\frac{3}{4}, 2\right)$

$\therefore n = \frac{3}{4}$

$\therefore n$ 의 범위는 $n \leq \frac{3}{4}$