1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

2. 수열 a, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, b, $\cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\therefore\ a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

3. 첫째항이 -25, 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항 ② 제 10 항 ③ 제 11 항
④ 제 12 항 ⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면
$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$
이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은
$3n - 28 > 0$, $3n > 28$
$\therefore\ n > \dfrac{28}{3} = 9.33\cdots$
따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

4. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10}을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

해설

$a=3,\ d=4,\ n=10$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$에 대입하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2\cdot3+(10-1)\cdot4\}}{2}=210$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

6. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$1, 4, 9, 16 \cdots$$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

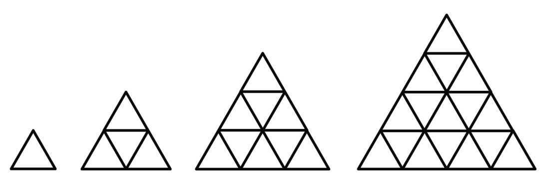
④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

7. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

8. 등차수열 -3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 21 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21 은 제 9 항이므로
$21 = -3 + 8d \quad \therefore \ d = 3$
따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3 인 등차수열이고,
x_4, x_5 은 각각 제 5 항, 제 6 항이므로
$x_4 = -3 + (5 - 1) \cdot 3 = 9$
$x_5 = -3 + (6 - 1) \cdot 3 = 12$
따라서 $x_4 + x_5$ 은 21 이다.

9. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉢　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

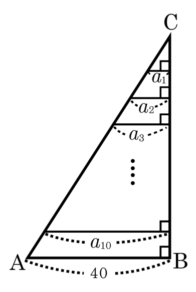
공차가 3인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6인 등차수열 ∴ 참

㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
$= 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6인 등차수열 ∴ 참

10. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 a_1, a_2, $a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1 + a_{10} = 40,\ a_2 + a_9 = 40, \cdots, a_5 + a_6 = 40$이므로
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 40 \times 5 = 200$

11. x에 관한 삼차방정식 $x^3-9x^2+23x-k=0$의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

세 근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$(a-d)+a+(a+d)=3a=9 \quad \therefore\ a=3$

$(3-d)\cdot 3+(3-d)(3+d)+3\cdot(3+d)=23$

$9-3d+9-d^2+9+3d=23$

$27-d^2=23, \quad d^2=4 \quad \therefore\ d=\pm 2$

그런데 $(3-d)\cdot 3\cdot(3+d)=k$

$3(9-d^2)=k$

$3(9-4)=k \quad \therefore\ k=15$

$a=3,\ k=15$

12. 12 와 18 로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13500

해설

12 와 18 로 나누어떨어지는 수는 12 와 18 의 최소공배수인 36 으로 나누어떨어지는 수이므로 $36n$(n은 자연수) 의 꼴이다.
이때, $100 \le 36n \le 1000$ 이므로
$2.\times\times \le n \le 27.\times\times$
$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 27$
$n = 3$ 일 때, $36n = 108$
$n = 27$ 일 때, $36n = 972$ 이므로
조건을 만족하는 수열은 첫째항이 108, 끝항이 972, 항수가 $27 - 2 = 25$ 인 등차수열을 이룬다.
따라서 구하는 총합은
$\dfrac{25(108 + 972)}{2} = 13500$

13. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p+q$의 값은?

① -43　② -33　③ -23　④ -13　⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고
$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면
$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
$b_1 = q + 5$이고
$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면
$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
$\{a_n\}$의 공차는 4,
$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$
$a_5 = p + 18,\ b_5 = 5 + 9q$
$p + 18 = 5 + 9q, \quad \therefore\ p = -31$
$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$

14. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A = \dfrac{a+b}{2}$, $G =$ ㉠, $H = \dfrac{㉡}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a = b$일 때 성립), ㉢ $= G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$ ② (㉡) - ab
③ (㉢) - $A \times H$ ④ (㉣) - 등비중항
⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,
$\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, $x = \dfrac{2ab}{a+b}$

15. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3 = 10$이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-5 < d < -4$

㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$

㉢ a_1이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$에서 $a_1 = 10 - 2d$

$S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$에서 $a_1 + 4d > 0$

$10 - 2d + 4d > 0$

$\therefore\ d > -5$

$S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$에서 $2a_1 + 9d < 0$

$2(10 - 2d) + 9d < 0$

$\therefore\ d < -4$

$\therefore\ -5 < d < -4$(참)

㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$

㉠에서 $-10 < 2d < -8$이므로

$0 < 10 + 2d < 2$ 즉, $0 < a_5 < 2$

$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$

$-15 < 3d < -12$이므로

$-5 < 10 + 3d < -2$ 즉, $-5 < a_6 < -2$

$\therefore\ a_5 > 0,\ a_6 < 0$(참)

㉢ $a_1 = 10 - 2d$이므로

$-5 < d < -4$에서 $18 < 10 - 2d < 20$

즉, $18 < a_1 < 20$

a_1이 정수이므로 $a_1 = 19$

$a_1 + 2d = 10$에서 $d = -\frac{9}{2}$

$\therefore\ a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$

$\therefore\ a_1 + a_9 = 2 \neq 0$(거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.