1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

2. 수열 $a,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ b,\ \cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 d라 하면 $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

3. 첫째항이 -25, 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항

④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0, \ 3n > 28$

$$\therefore \ n > \frac{28}{3} = 9.33\cdots$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

4. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10}을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

해설

$a=3,\ d=4,\ n=10$이므로

$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$에 대입하면

$S_{10} = \dfrac{10\{2\cdot 3+(10-1)\cdot 4\}}{2} = 210$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

6. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$1, 4, 9, 16 \cdots$$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

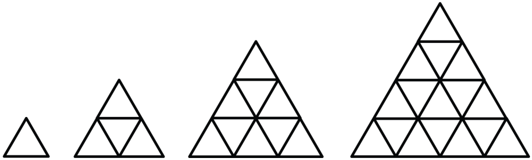
④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

7. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

8. 등차수열 $-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15　② 17　③ 19　④ 21　⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d 라고 하면 21은 제 9항이므로

$21 = -3 + 8d \quad \therefore\ d = 3$

따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3인 등차수열이고,

$x_4,\ x_5$ 은 각각 제 5항, 제 6항이므로

$x_4 = -3 + (5-1)\cdot 3 = 9$

$x_5 = -3 + (6-1)\cdot 3 = 12$

따라서 $x_4 + x_5$ 은 21이다.

9. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

ㄴ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

ㄷ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

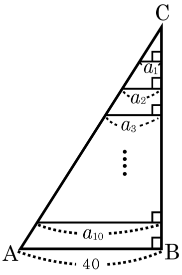
공차가 3 인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

ㄱ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9 인 등차수열 ∴ 참

ㄴ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

ㄷ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
$= 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

10. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times 5=200$

11. x에 관한 삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + 23x - k = 0$의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$(a-d)+a+(a+d)=3a=9 \quad \therefore\ a=3$

$(3-d)\cdot 3+(3-d)(3+d)+3\cdot(3+d)=23$

$9-3d+9-d^2+9+3d=23$

$27-d^2=23,\quad d^2=4 \quad \therefore\ d=\pm 2$

그런데 $(3-d)\cdot 3\cdot(3+d)=k$

$3(9-d^2)=k$

$3(9-4)=k \quad \therefore\ k=15$

$a=3,\ k=15$

12. 12와 18로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13500

해설

12와 18로 나누어떨어지는 수는 12와 18의 최소공배수인 36으로 나누어떨어지는 수이므로 $36n$(n은 자연수)의 꼴이다.

이때, $100 \leq 36n \leq 1000$이므로

$2.\times\times \leq n \leq 27.\times\times$

$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 27$

$n = 3$일 때, $36n = 108$

$n = 27$일 때, $36n = 972$이므로

조건을 만족하는 수열은 첫째항이 108, 끝항이 972, 항수가 $27 - 2 = 25$인 등차수열을 이룬다.

따라서 구하는 총합은

$$\frac{25(108 + 972)}{2} = 13500$$

13. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p+q$의 값은?

① -43　② -33　③ -23　④ -13　⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \left\{2(n-1)^2 + p(n-1)\right\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면

$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$b_1 = q + 5$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \left\{q(n-1)^2 + 5(n-1)\right\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면

$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$의 공차는 4,

$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$

$a_5 = p + 18,\ b_5 = 5 + 9q$

$p + 18 = 5 + 9q,\quad \therefore\ p = -31$

$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$

14. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠~㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A=\dfrac{a+b}{2}$, $G=$ ㉠, $H=\dfrac{㉡}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a=b$일 때 성립), ㉢ $=G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$
② (㉡) - ab
③ (㉢) - $A \times H$
④ (㉣) - 등비중항
⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\ x=\frac{2ab}{a+b}$$

15. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3 = 10$이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-5 < d < -4$

㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$

㉢ a_1이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$이다.

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$에서 $a_1 = 10 - 2d$

$S_9 = \dfrac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$에서 $a_1 + 4d > 0$

$10 - 2d + 4d > 0$

$\therefore\ d > -5$

$S_{10} = \dfrac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$에서 $2a_1 + 9d < 0$

$2(10 - 2d) + 9d < 0$

$\therefore\ d < -4$

$\therefore\ -5 < d < -4$(참)

㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$

㉠에서 $-10 < 2d < -8$이므로

$0 < 10 + 2d < 2$ 즉, $0 < a_5 < 2$

$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$

$-15 < 3d < -12$이므로

$-5 < 10 + 3d < -2$ 즉, $-5 < a_6 < -2$

$\therefore\ a_5 > 0$, $a_6 < 0$(참)

㉢ $a_1 = 10 - 2d$이므로

$-5 < d < -4$에서 $18 < 10 - 2d < 20$

즉, $18 < a_1 < 20$

a_1이 정수이므로 $a_1 = 19$

$a_1 + 2d = 10$에서 $d = -\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -17$

$\therefore\ a_1 + a_9 = 2 \neq 0$(거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.