1. 세 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 24\text{의 약수}\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 9\}$, $C = \{x \mid x\text{는 } 30\text{의 약수}\}$ 에 대하여
$(B \cup C) \cap A$ 의 원소 중에서 가장 큰 원소를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 이 된다.
먼저 B 와 C 의 합집합을 구해보면 $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 30\}$ 이고 A 와 교집합을 구하면 $(B \cup C) \cap A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이다. 따라서 가장 큰 원소는 6 이다.

2. 세 집합 $A=\{2,5,6,9,12\}$, $B=\{1,7,9,10,12\}$, $C=\{2,5,6,7,9,10\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A\cap B=\{9,12\}$

② $B\cup C=\{1,2,5,6,7,9,10\}$

③ $A\cup C=\{2,5,6,7,9,10,12\}$

④ $(A\cap B)\cup C=\{2,5,6,7,9,10,12\}$

⑤ $A\cap(B\cup C)=\{2,5,6,9,12\}$

해설

② $B\cup C=\{1,2,5,6,7,9,10,12\}$

3. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{x \mid x$는 10 미만의 짝수$\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$ 일 때, 다음 집합의 원소들의 합을 구하여라.

보기

$\{x \mid x \in B$ 그리고 $x \notin A\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\{x \mid x \in B$ 그리고 $x \notin A\} = B - A$

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$이므로 $B - A = \{1,\ 3,\ 5\}$

$\therefore 1 + 3 + 5 = 9$

4. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 20, n(B) = 15, n(A \cap B) = 6$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$ 이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 6 = 29$ 이므로
$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29 - 6 = 23$ 이다.

5. $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y},\ x \to f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 a, b라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

6. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2　② -3　③ -4　④ -5　⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$

$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$a = -2, b = 2$

$\therefore ab = -4$

7. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3,\ a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

$a_2,\ a_3,\ a_4$는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

8. 수열 $1,\ -10,\ 10^2,\ -10^4, \cdots$ 은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다. 이 때, $a+r$의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$a=1,\ r=-10$

$\therefore a+r=-9$

9. 두 함수 $f(x) = x - 1, g(x) = x^2 + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f))(x) = 18$ 을 만족하는 실수 x 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f))(x) &= f(g(f(x))) = f(g(x-1)) \\ &= f((x-1)^2 + 4) \\ &= f(x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 - 2x + 5) - 1 \\ &= x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

$(f \circ (g \circ f))(x) = 18$

이므로 $x^2 - 2x + 4 = 18,\ x^2 - 2x - 14 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 의 값의 합은 2 이다.

10. $\sqrt[3]{9}$ 에 가장 가까운 정수를 x 라 할 때,
$\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}} + \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{27}$ 에서 $x = 2$

$\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pm 1$ 이므로

$$준식 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$= (3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2}) = 6$$

11. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$에 대하여 x의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $x + a - \dfrac{1}{b}$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times$

정수 부분 $a = 1$, 소수 부분 $b = x - a = \sqrt{5} - 2$

$x + a - \dfrac{1}{b} = \sqrt{5} - 1 + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2}$

$= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2$

12. 분수함수 $y = \dfrac{x+k-1}{x-1}$ $(k \neq 0)$ 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.

② $(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭이다.

③ $|k|$가 클수록 곡선은 $(1,\ 1)$ 에 가까워진다.

④ 점근선은 $x = 1$, $y = 1$ 이다.

⑤ $y = -x + 2$ 에 대하여 대칭이다.

해설

① 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수, 치역은 $y \neq 1$ 인 실수
② 점근선의 교점인 $(1,\ 1)$ 에 대해 대칭이다.
③ $|k|$가 커질 수록 $(1,\ 1)$ 에 멀어진다.
⑤ 기울기가 ± 1 이고 $(1,\ 1)$ 을 지나는 직선에 대칭이다.

13. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y = \frac{x+4}{x+3}$ ② $y = \frac{x+4}{x-3}$ ③ $y = \frac{4x-4}{2x-1}$

④ $y = \frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y = \frac{x+3}{2-x}$

해설

① $y = \frac{x+4}{x+3} = \frac{(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 1$

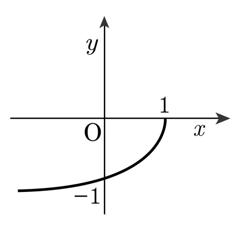
② $y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{(x-3)+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1$

③ $y = \frac{4x-4}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-2}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1} + 2 = \frac{-1}{x-\frac{1}{2}} + 2$

④ $y = \frac{2x}{2x-1} = \frac{(2x-1)+1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + 1$

⑤ $y = \frac{x+3}{2-x} = \frac{-(2-x)+5}{2-x} = \frac{-5}{x-2} - 1$

14. $y=-\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

점 $(1,0)$ 에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$ 이고

주어진 그래프가 점 $(0,-1)$ 를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$ 이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

15. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{100}{k}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{100}{k}\right] = 100+50+33+25+20+16+14+12+11+10 =$ 291

16. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
양변에 (㉠)^3 을 더하면
$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$
$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$
따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$
$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$
$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

17. 세 수 $A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

① $A > B > C$　② $B > A > C$　③ $C > B > A$
④ $A > C > B$　⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로
지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.
$3, 4, 6$ 의 최소공배수가 12 이므로
$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$
$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$
$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$
$\therefore A > B > C$

18. $2\log(a-2b)=\log 2b+\log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b)=\log 2b+\log(62b-a)$을 간단히 정리하면

$\log(a-2b)^2=\log 2b(62b-a)$

$(a-2b)^2=2b(62b-a)$

$a^2-4ab+4b^2=124b^2-2ab$

$a^2-2ab-120b^2=0$

$(a+10b)(a-12b)=0$

$\therefore\ a=-10b$ 또는 $a=12b$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b>0,\ 2b>0,\ 62b-a>0$이므로 $a>0,\ b>0$

따라서 $a=12b$이고 $\frac{a}{b}=12$이다.

19. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 2.25$ 의 값을 계산하면?

① 0.1661 ② 0.1761 ③ 0.1771

④ 0.3522 ⑤ 0.5283

해설

$\log_{10} 2.25 = \log_{10} (3^2 \times 5^2 \div 100)$

$= 2\log 3 + 2(1 - \log 2) - 2$

$= 0.3522$

20. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a\sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$
② $\frac{3}{2} < A \leq 3$
③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$
④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$
⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$

21. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다) 에 알맞은 수를 나열한 것은?

$\log 5$, (가), (나), (다), $\log 80$, $\cdots$

① 1, $\log 20$, $\log 40$　② $\log 15$, $\log 20$, $\log 40$
③ $\log 20$, $\log 40$, $\log 50$　④ $\log 27$, $\log 45$, $\log 50$
⑤ $\log 27$, $\log 45$, $\log 52$

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 제 n항을 a_n 이라고 하면 첫째항이 $\log 5$, 제 5항이 $\log 80$ 이므로

$a = \log 5 \cdots$ ㉠

$a_5 = \log 80$ 에서 $a + 4d = \log 80 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4d = \log 80 - \log 5 = \log \frac{80}{5}$

$= \log 16 = 4\log 2$

$\therefore\ d = \log 2$

$\therefore\ a_2 = a + d = \log 5 + \log 2 = \log 10$

$a_3 = a_2 + d = \log 10 + \log 2 = \log 20$

$a_4 = a_3 + d = \log 20 + \log 2 = \log 40$

22. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $a_{n+1} - a_n = \log \frac{b_n}{b_{n+1}}$ 을 만족할 때, a_{100} 의 값과 같은 것은? (단, $a_1 = 0$)

① $\log \frac{b_{101}}{b_1}$　② $\log \frac{b_{101}}{b_2}$　③ $\log \frac{b_1}{b_{100}}$
④ $\log \frac{b_1}{b_{101}}$　⑤ $\log \frac{b_2}{b_{101}}$

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\left\{\log \frac{b_n}{b_{n+1}}\right\}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_1 + \sum_{k=1}^{99} \log \frac{b_k}{b_{k+1}} \\ &= \log \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_3} \cdots \frac{b_{99}}{b_{100}} \\ &= \log \frac{b_1}{b_{100}} \end{aligned}$$

23. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32　　② 56　　③ 64　　④ 72　　⑤ 120

해설

'적어도~ '문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$
$\therefore 128 - 8 = 120$

24. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 집합 B 의 부분집합의 개수보다 8 개 더 많을 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구한 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 7　　⑤ 9

해설

부분집합의 개수는 (2 의 거듭제곱) 개이므로
2, 4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$ 이다.
이 중에서 차가 8 인 두 수는 16 과 8 이다.
$\therefore\ 2^{n(A)} = 16 = 2^4,\ 2^{n(B)} = 8 = 2^3$
$(\because\ n(A) > n(B))$
$\therefore\ n(A) = 4,\ n(B) = 3$
$4 - 3 = 1$

25. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A = B = C$ 의 관계가 되는 경우를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A = B$	㉡ $A = C$	㉢ $B = C$
㉣ $B \subset A$	㉤ $C \subset A$	㉥ $C \subset B$

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉤ ④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉤, ㉥

해설

㉡ $A = C$ 면 $A \subset C$, $C \subset A$ 이므로, $A = B = C$ 의 관계가 성립한다.

㉤ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $C \subset A$ 일 때 $A = B = C$ 의 관계가 성립한다.

26. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ = \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

① $|a+b+c| \le |a| + |b| + |c|$

② $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le |a| + |b| + |c|$

③ $\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

④ $a^2+b^2+c^2 \le (a+b+c)^2$

⑤ $a+b+c \ge 3^3\sqrt{abc}$

해설

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \ge 0$ 이므로

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

③의 경우 양변을 제곱하여 빼면

$3(a^2+b^2+c^2) - |a+b+c|^2$

$= 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0$

$\therefore \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

27. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$　② $\dfrac{1}{2008}$　③ $\dfrac{1}{2009}$　④ $\dfrac{1}{4017}$　⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

28. $\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면

$xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로

$2(xy+yz+zx) = 94k$, $\quad \therefore\ xy + yz + zx = 47k$ 이므로

$yz = 20k,\ zx = 15k,\ xy = 12k$

또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로

$x^2\ 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$

$225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$

$144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$

$\therefore\ \dfrac{x^2+y^2}{z^2} = \dfrac{9k+16k}{25k} = 1$

29. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x(x+1)}}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}}$ 의 값을 구하면?

① $3+\sqrt{15}$ ② $4-\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{3}+1$

④ $5-\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{15}$

해설

$\sqrt{2x+1\pm 2\sqrt{x(x+1)}} = \sqrt{x+1} \pm \sqrt{x}$ (복호동순)

$$(\text{준식}) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$
$$= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$
$$= 2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{3}+1$$

30. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3+b^3=9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6　② 4　③ 2　④ 1　⑤ 11

해설

$\sqrt{k}=a+b \quad \therefore\ b=\sqrt{k}-a$

$a^3+b^3=9ab, \quad a^3+(\sqrt{k}-a)^3=9a(\sqrt{k}-a)$

$\therefore\ 3a(3a-k)+\sqrt{k}(3a^2-9a+k)=0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a-k)=0, \quad 3a^2-9a+k=0$

연립하여 풀면

$\therefore a=2,\ \ k=6$

31. m이 유리수일 때, $\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$

$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} \cdot \sqrt{2}$

가 유리수이므로

$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

32. 일차 이상의 다항식 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ 을 $3x-1$ 로 나눈 나머지를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 $\frac{p}{4}-\frac{1}{q}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ (p, q 는 자연수) 로 나타낼 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$f(x)$ 를 $3x-1$ 로 나눈 나머지는

$$a_n=f\left(\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$=\frac{3}{2}\times 10-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=15-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$=\frac{59}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$\therefore\ p+q=59+4=63$

33. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{31}{21}$　④ $\frac{40}{21}$　⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$\alpha_n+\beta_n=-4$

$\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$

$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{4}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

34. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_2 = -1$

㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$

㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$에서 $n = 1$을 대입하면
$2\sum_{k=1}^{1} a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$
즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$
$\therefore\ a_2 = \frac{4a_1 + 1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$(참)
㉡ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots$㉠
$2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots$㉡
㉡−㉠에서
$2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
$2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
$\therefore\ 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$(거짓)
㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$
$= 2(3a_{n+1} - a_n)$
따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다. (참)
따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

35. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,$ $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$
$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$
$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라하면
$2b_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$
$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$
$\therefore \{b_n\}$은 초항이 1 이고
공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열
$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$
$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$
$$\vdots$$
$$+\underline{\left\lfloor a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right.}$$

$$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 1 + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$
$a_n = 3 - 2^{-n+2}$
$a_{50} = 3 - 2^{-48}$
$p = 3,\ q = -48\ \ \therefore p + q = -45$

36. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $2^{4+2}+3^{1+2}=91=13\cdot7$로 13의 배수이다

(ii) $n-k$(k는 자연수)일 때 성립한다고 가정하면

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$(m은 자연수)

$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}=$ ㉠ $\cdot 2^{4k+2}+$ ㉡ $\cdot 3^{k+2}$

$=$ ㉠ $\cdot 13m+$ ㉢ $\cdot 3^{k+2}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 $2^{4n+2}+3^{k+2}$은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$ 의13의 배수이다.

위의 증명에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 수들의 합은?

① 1　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 8

해설

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$일 때

$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}$도 13의 배수가

되는지 확인하는 과정이다.

$2^4\cdot2^{4k+2}+3\cdot3^{k+2}$

$=2^4\cdot(13m-3^{k+2})+3\cdot3^{k+2}$

$=2^4\cdot13m-16\cdot3^{k+2}+3\cdot3^{k+2}$

$=2^4\cdot13m+(-13)\cdot3^{k+2}$

$\therefore$ ㉠$=16$, ㉡$=3$, ㉢$=-13$

$\therefore$ ㉠$+$ ㉡$+$ ㉢$=6$

37. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})$$
$$= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2 - \frac{1}{3})$$
$$= 2 - \frac{1}{2} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

38. 집합 M을 $M = \{3a+5b | a,\ b$는 음이 아닌 정수$\}$로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

㉠ $89 \in M, 97 \in M$
㉡ $K \in M \ \Rightarrow\ K+3 \in M$
㉢ 두 자리의 모든 자연수는 M 의 원소이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $89 = 9+80 = 3\times3+5\times16 \in M$
$97 = 27+70 = 3\times9+5\times14 \in M$
㉡ $3a+5b = K$ 라 하면
$K+3 = 3(a+1)+5b \in M$
㉢ $10 = 3\times0+5\times2$
$11 = 3\times2+5\times1$
$12 = 3\times4+5\times0$
$13 = 3\times1+5\times2$
$14 = 3\times3+5\times1$
이므로 15 이후의 자연수는 $10+5=15,\ 11+5=16,\ 12+5=17,\ 13+5=18,\ 14+5=19 \cdots$ 의 꼴로 표현이 가능하다.
따라서 두 자리의 모든 자연수는 M의 원소이다.

39. 집합 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 C의 개수는?

㉠ $A = B \cup C$	㉡ $n(A) = 7$	㉢ $n(B) = 4$

① 32 개　② 16 개　③ 8 개　④ 4 개　⑤ 2 개

해설

집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$라 놓으면 집합 A의 원소는 7개이고,
$A = B \cup C$이므로
$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ x_1,\ x_2,\ x_3\}$ 이 때
집합 C는 $x_1,\ x_2,\ x_3$을 반드시 원소로 가져야 하므로
$\{x_1,\ x_2,\ x_3\} \subset C \subset A$
집합 C는 $x_1,\ x_2,\ x_3$을 포함하는 A의 부분집합이므로 그 개수는
$2^{7-3} = 2^4 = 16$(개)

40. 두 집합 $A = \{3, 2a-5, 2a+1\}$, $B = \{a-2, a, a+2\}$ 에 대하여 $A \cap B^c = \{7\}$ 일 때, a 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$A = \{3, 2a-5, 2a+1\}$, $B = \{a-2, a, a+2\}$ 이고
$A \cap B^c = A - B = \{7\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 7 이 반드시 있다.
(1) $2a - 5 = 7$ 일 때, $a = 6$ 이고
$A = \{3, 7, 13\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ 이다.
이때 $A - B \neq 7$ 이므로 성립할 수 없다.
(2) $2a + 1 = 7$ 일 때, $a = 3$ 이고
$A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이다.
이때 $A - B = \{7\}$ 이므로 성립된다.
$\therefore a = 3$

41. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각 $A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\}$,
$B = \left\{x|x\text{는 두 자리 자연수}\right\}$ 일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$
$B = \left\{x|x\text{는 두 자리 자연수}\right\} = \{10, 11, 12, 13, \cdots\}$
$(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로
$n(A^c \cup B)^c = 7$

42. a, b는 양의 상수이다. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, $x>0$, $y>0$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$ ② $4\sqrt{ab}$ ③ $a+b+2\sqrt{ab}$
④ $a+b+4\sqrt{ab}$ ⑤ $ab+3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균)≥ (기하평균) 이므로

$(x+y)\cdot 1=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$

$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geq a+b+2\sqrt{\frac{ay}{x}\cdot\frac{bx}{y}}$

$=a+b+2\sqrt{ab}$

43. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A(x = 1,\ 2,\ 3)$ 이 성립하는 것의 개수는?

① 3 개　② 5 개　③ 9 개　④ 18 개　⑤ 24 개

해설

$2x - f(x) \in A$ 이면, $x = 1 \ \Rightarrow\ 2 - f(1) \in A$

$\therefore\ f(1) = 1$

$x = 2 \ \Rightarrow\ 4 - f(2) \in A$

$\therefore\ f(2) = 1,\ f(2) = 2,\ f(2) = 3$

$x = 3 \ \Rightarrow\ 6 - f(3) \in A$

$\therefore\ f(3) = 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

44. $T_n = 1+2+3+\cdots+n$이라 하고, $P_n = \dfrac{T_2}{T_2-1} \times \dfrac{T_3}{T_3-1} \times \cdots \times \dfrac{T_n}{T_n-1}$ $(n \geq 2)$라고 할 때, P_{1991}에 가장 근사한 값은?

① 2.0　② 2.3　③ 2.6　④ 2.9　⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{T_n}{T_n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \fallingdotseq 2.9$$

45. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{{}^{3}\sqrt{65}}{4}$　③ $\frac{1+{}^{6}\sqrt{13}}{2}$
④ ${}^{3}\sqrt{2}$　⑤ 1

해설

$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}},\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면
$a^3+b^3=10,\ ab=-3,$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$
$a+b=x$ 라고 하면,
$x^3+9x-10=0,$
$(x-1)(x^2+x+10)=0$
$\therefore\ x=1$

46. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답:

▷ 정답: 39

해설

$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{k} = b_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^2$

$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \ (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$

47. 수열 $\{a_n\}$은 처음 12개 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{12}$가 서로 다르고 $a_{n+12} = a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$을 만족시킨다. 이 때, 세 집합
$A = \{a_{4n+1},\ n$은 자연수$\}$
$B = \{a_{5n+2},\ n$은 자연수$\}$
$C = \{a_{6n+3},\ n$은 자연수$\}$
의 원소의 개수를 각각 $p,\ q,\ r$이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+12} = a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로 12개의 숫자가 반복하여 나타나는 수열이다.
(i) $b_n = a_{4n} + 1$이라 하면
$\{b_n\} = a_5,\ a_9,\ a_{13},\ a_{17},\ a_{21},\ a_{25}, \cdots$
위의 수열을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{12}$을 이용하여 다시 쓰면
$\{b_n\} : a_5,\ a_9,\ a_1,\ a_5,\ a_9,\ a_1, \cdots$ 이므로 $A = \{a_1,\ a_5,\ a_9\}$
$\therefore\ p = n(A) = 3$
(ii) $c_n = a_{5n+2}$라 하면
$\{C_n\} : a_7,\ a_{12},\ a_{17},\ a_{22},\ a_{27},\ a_{32},\ a_{37},\ a_{42},\ a_{47},$
$a_{52},\ a_{57},\ a_{62},\ a_{67}, \cdots$
이므로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_{12}$를 이용하여 다시쓰면
$\{C_n\} = a_7,\ a_{12},\ a_5,\ a_{10},\ a_3,\ a_8,\ a_1,\ a_6,\ a_{11},\ a_4,\ a_9,$
$a_2,\ a_7,\ \cdots$
이므로 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_{12}\}$
$\therefore\ q = n(B) = 12$
(iii) $d_n = a_{6n+3}$이라 하면
$\{d_n\} : a_9,\ a_{15},\ a_{21},\ a_{27},\ \cdots$
위의 수열을 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{12}$를 이용하여 다시 쓰면
$\{d_n\} : a_9,\ a_3,\ a_3,\ \cdots$
이므로 $C = \{a_3,\ a_9\}$
$\therefore\ r = n(C) = 2$
이상에서 $p + q + r = 3 + 12 + 2 = 17$

48. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{51} - a_1$　　② $a_{51} - a_2$　　③ $a_{51} + a_1$

④ $a_{52} - a_2$　　⑤ $a_{52} + a_2$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_3 - a_2 \\
a_2 &= a_4 - a_3 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_{50}} &\underline{= a_{52} - a_{51}} \\
\sum_{k=1}^{50} a_k &= a_{52} - a_2
\end{aligned}$$

49. m, n이 정수일 때, $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

① 288　　② 2534　　③ 3042　　④ 5164　　⑤ 7254

해설

$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$이고 $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{4}{m}}$

이 수가 자연수가 되려면 $-\dfrac{6}{n}$과 $-\dfrac{4}{m}$가 모두 자연수가 되어야 하므로

$n = -1, -2, -3, -6$이고 $m = -1, -2, -4$이다.

따라서 $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은

$(2^6 + 2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^2 + 3) = 78 \times 93 = 7254$

50. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$를 만족하는 k의 값들 중 최소인 수를 p라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b는 서로소) 이다. 이때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로
$k = 2^{30}$, 3^{30}, 4^{30}, $\cdots$
따라서, k의 최소값은 2^{30}이므로 $p = 2^{30}$이다.
$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$
$\therefore\ a+b = 17$