1. 복소수 $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+5i}{2}$$

$$\therefore\ a+b=\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=2$$

2. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

4. $f(x) = x^2 - ax + 1$이 $x - 1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$
$\therefore\ a = 2$

5. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

6. 실수 $x,\ y$에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

7. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4} = m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore\ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

8. 부등식 $|x+1|+|x-1| \geq 4$의 해는 $x \leq a$ 또는 $x \geq b$이다. $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(i) $x < -1$

$-(x+1)-(x-1) \geq 4,\ x \leq -2$

(ii) $-1 \leq x < 1$

$x+1-(x-1) \geq 4$

$2 \geq 4$ (성립 안함)

(iii) $x \geq 1$

$x+1+x-1 \geq 4$

$x \geq 2$

(i), (iii)을 합하면 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$\therefore\ a+b=0$

9. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1,\ \dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5,\ b=6$

$\therefore a+b=11$

10. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2-3x \le 0$ 에서
$x(x-3) \le 0$ 이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ (가)
$x^2-5x+4<0$ 에서
$(x-1)(x-4)<0$ 이므로
$1<x<4 \cdots$ (나)
(가), (나)에 의해
$1<x \le 3$ 이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

11. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

12. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$　② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$　④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$f(x) = (x+1)Q(x) + R$

$\therefore\ xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR$

$\therefore\ xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3$

$= (x+1)\{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3$

$= (x+1)\{xQ(x) + R\} - R - 3$

13. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$\begin{aligned}P&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=\quad\vdots\\&=(2^{16}-1)(2^{16}+1)\\&=2^{32}-1\end{aligned}$$

14. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2 개씩 나온다.

$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

15. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ (\text{단. } a\neq b\neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$(\text{준 식})=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

16. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3+3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$
$$= \sqrt{3\cdot(-3)} - \sqrt{(-3)\cdot(-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$
$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$
$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$
$$= -3+3i$$

17. 방정식$|x-3|+|x-4|=2$의 해의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

i) $x<3$일 때,
$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$
$\therefore\ x=\frac{5}{2}$
ii) $3\le x<4$일 때
$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $x\ge 4$일 때
$x-3+x-4=2,\ 2x=9$
$\therefore\ x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$이고 그 합은 7

18. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면
$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$

$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0, \left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\alpha+\beta=12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

19. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$
$-1 \le x \le 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
$x = 1$ 일 때, 최대이고
최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$
$\therefore k = 2$
따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로
$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.
$-1 \le x \le 2$에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$
이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값
-1을 갖는다.

20. x에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)$의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$의 최댓값은 6이다.

21. $x+y=3, x\geq 0, y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$y=3-x\geq 0$

$\therefore\ 0\leq x\leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

22. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, x^{180}의 값을 구하면?

① 180 ② −180 ③ −1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$양변에
$(x+1)$을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

23. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$이다. pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2\\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2\\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2\\ &= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2\\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p=-18,\ q=-4$

$\therefore pq=(-18)\times(-4)=72$

24. $x^4 + 3x^2 + 4$를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$

③ $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

⑤ $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

25. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$