

1. $12^3 \times 2^{-4} \div 3^2$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 12

⑤ 24

해설

$$\begin{aligned}(2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} &= 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} \\ &= 2^2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① -3 은 -27 의 세제곱근이다.
- ② 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이다.
- ③ $-\sqrt[4]{81} = -3$
- ④ $\sqrt{-16} = -2$
- ⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

- ④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt{-16} = \pm 2$

3. $\sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{5 - 3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

$$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$$

$$20 = k + 3$$

$$k = 17$$

5. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2^{\frac{7}{8}}$ ㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2$
㉢ $(3^{\sqrt{2}})\times(3^{\sqrt{2}})=9$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$
 $=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{7}{8}}$
 $\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8 \quad \therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}})\times(3^{\sqrt{2}})=(3^{\sqrt{2}})^2=3^{2\sqrt{2}} \quad \therefore$ 거짓

6. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

7. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

① $A < B < C$

② $B < A < C$

③ $B < C < A$

④ $C < B < A$

⑤ $C < A < B$

해설

$$A = 2^{\frac{1}{2}} \text{이면 } A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$$

$$B = 3^{\frac{1}{3}} \text{이면 } B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$$

$$C = 9^{\frac{1}{9}} \text{이면 } C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$$

$$C^{18} < A^{18} < B^{18} \text{ 이므로}$$

$$\therefore C < A < B$$

8. 세 수 $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$, $B = \sqrt{2\sqrt[3]{5}}$, $C = \sqrt[12]{1024}$ 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $B < C < A$ ⑤ $C < B < A$

해설

거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt[n]{N}$ 꼴로 통일한다.

$$A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{50}} = \sqrt[6]{50}$$

$$B = \sqrt{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{40}} = \sqrt[6]{40}$$

$$C = \sqrt[12]{1024} = \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt[6]{32} < \sqrt[6]{40} < \sqrt[6]{50} \text{ 이므로}$$

$$\therefore C < B < A$$

9. $P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

- ① $3\sqrt[4]{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned} P &= \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2} \\ &= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4} \\ &= \frac{3^{-3}}{3^{-14}} \\ &= 3^{-3-(-14)} = 3^{11} \\ \therefore \sqrt[4]{P} &= \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27} \end{aligned}$$

10. $x - y = 2$, $2^x + 2^{-y} = 5$ 일 때, $8^x + 8^{-y}$ 의 값은?

① 61

② 62

③ 63

④ 64

⑤ 65

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진식}) &= 2^{3x} + 2^{-3y} \\ &= (2^x + 2^{-y})^3 - 3 \cdot 2^x 2^{-y} (2^x + 2^{-y}) \\ &= 5^3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 = 65\end{aligned}$$

11. $x > 0$ 이고 $x + x^{-1} = 3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x + x^{-1} + 2 \text{에서}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 3 + 2 = 5 \text{이므로}$$

$$\text{이 때, } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^3 - 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

12. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, $x^2 + x^{-2}$ 의 값을 구하면?

① 33

② 36

③ 43

④ 47

⑤ 49

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 9$$

$$x + x^{-1} + 2 = 9$$

$$\therefore x + x^{-1} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = 49$$

$$x^2 + x^{-2} + 2 = 49$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 47$$

13. $x > 0$ 이고 $x^2 + x^{-2} = 7$ 일 때, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1})$ 의 값은?

- ① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$$x^2 + x^{-2} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2 \text{에서}$$

$$(x + x^{-1})^2 = 7 + 2 = 9$$

$$x + x^{-1} > 0 \text{이므로 } x + x^{-1} = 3$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 \text{에서}$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 = 5$$

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) = 3\sqrt{5}$$

14. $p \times 3^x = 1$, $q \times 3^y = 1$ 일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$ 을 p , q 로 바르게 나타낸 것은?

- ① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x > 0$, $3^y > 0$ 이므로 $p > 0$, $q > 0$ 이다.

$$3^x = \frac{1}{p}, \quad 3^y = \frac{1}{q}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$$

$$= (3^x)^{-4} (3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4} \left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4 q^2$$

15. n 이 2이상의 자연수일 때, 거듭제곱에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ n 이 홀수일 때, $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$ 이다.
- ㉡ n 이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = -5$ 이다.
- ㉢ n 이 홀수일 때, $x^n = -5$ 를 만족하는 실수 x 는 1개다.
- ㉤ n 이 짝수일 때, $x^n = 5$ 를 만족하는 실수 x 는 n 개다.

- ① ㉠, ㉢ ② ㉡, ㉢ ③ ㉡, ㉤
④ ㉠, ㉡, ㉤ ⑤ ㉠, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ n 이 홀수일 때, 양변을 n 제곱하면
 $(\sqrt[n]{-5})^n = -5, (-\sqrt[n]{5})^n = -5$
 $\therefore \sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$
- ㉡ n 이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = 5$
- ㉢ n 이 홀수일 때, $x^n = -5$ 를 만족하는 실수 x 는 $\sqrt[n]{-5}$ 의 1개이다.
- ㉤ n 이 짝수일 때, $x^n = 5$ 를 만족하는 실수 x 는 $\pm\sqrt[n]{5}$ 의 2개이다.
이상에서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

16. 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

- ㉠ -8 의 세제곱근은 $\sqrt[3]{-8}$ 이다.
- ㉡ $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 일 때, $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ 이다.
- ㉤ n 이 2 이상인 홀수일 때, 실수 a 에 대하여 $x^n = a$ 를 만족하는 실수 x 는 1개다.
- ㉥ $a < 0$ 일 때, $\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[3]{(-a)^3} = 0$ 이다.

- ① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉡, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉥

⑤ ㉢, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ (거짓) -8 의 세제곱근은 $\sqrt[3]{-8}, 1 \pm \sqrt{3}i$ 이다.
- ㉡ (참)
- ㉢ (참)
- ㉤ (참)
- ㉥ (거짓) $(-a) + (-a) = -2a$

17. $A = \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ 에 대하여 $[2A]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} &= \sqrt{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$A = \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$\therefore 2A = \sqrt{24}$$

그런데 $4 < 2A < 5$ 이므로

$$[2A] = 4$$

18. $\frac{a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6}{a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9}}$ 을 간단히 하면?

- ① a^8 ② a^9 ③ a^{10} ④ a^{11} ⑤ a^{12}

해설

분모 분자에 각각 a^{10} 을 곱하면

$$\begin{aligned} & \frac{a^{10}(a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a^{10}(a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9})} \\ &= \frac{a^{10}(a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a} = a^{10} \end{aligned}$$

19. $a^{8x} = 3 + \sqrt{8}$ 일 때, $\frac{a^x + a^{2x} + a^{3x}}{a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x}} = m + \sqrt{n}$ 을 만족하는 m, n 에 대하여 $100m + n$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$, m 은 유리수, $\sqrt{n}$ 은 무리수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 102

해설

$$\begin{aligned} a^{8x} = 3 + \sqrt{8} &\text{에서 } a^{4x} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2+1} \\ \therefore \frac{a^x + a^{2x} + a^{3x}}{a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x}} &= \frac{a^{4x}(a^x + a^{2x} + a^{3x})}{a^{4x}(a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x})} \text{ 따라서 } m = \\ &= \frac{a^{4x}(a^x + a^{2x} + a^{3x})}{a^{4x}(a^x + a^{2x} + a^{3x})} \\ &= a^{4x} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

1, $n = 2$ 이므로

$$\therefore 100m + n = 102$$

20. 1이 아닌 양수 a, b, c 에 대하여 $a^3 = b^4 = 12^{12} = (abc)^x$ 이 성립할 때, 양수 x 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$$a^3 = b^4 = 12^{12} = (abc)^x = k \text{라 하면}$$

$$a = k^{\frac{1}{3}}, b = k^{\frac{1}{4}}, c = k^{\frac{1}{12}}, abc = k^{\frac{1}{x}}$$

$$abc = k^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}}$$

$$= k^{\frac{8}{12}}$$

$$= k^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$