1. 실수의 집합에서 실수의 집합으로의 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어질 때 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 를 차례대로 구하여라.

$$f(x) = 2x + 1$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 5

해설

다음 요령에 따르면 된다.

$f(0) = 2\times 0+1 = 1$, $f(1) = 2\times 1+1 = 3$, $f(2) = 2\times 2+1 = 5$

2. 두 집합 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{p,q,r,s\}$가 있다. X에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4\times 3\times 2=24$(개)

3. $3x = 2y$ 일 때, $\dfrac{2xy+y^2}{x^2+xy}$ 의 값은?

① $\dfrac{15}{7}$ ② $\dfrac{17}{8}$ ③ $\dfrac{19}{9}$ ④ $\dfrac{21}{10}$ ⑤ $\dfrac{23}{11}$

해설

$$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x$$

$$\therefore \ \frac{2xy+y^2}{x^2+xy} = \frac{3x^2+\frac{9}{4}x^2}{x^2+\frac{3}{2}x^2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{21}{10}$$

4. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$

$= |a-4| + |a-1|$

$= -a + 4 + a - 1 \quad = 3$

5. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

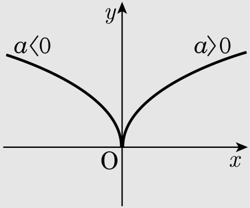
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$일 때와 $a < 0$일 때의 $y = \sqrt{ax}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

$a < 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$이므로 ①은 틀린 것이다.

6. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14}-2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

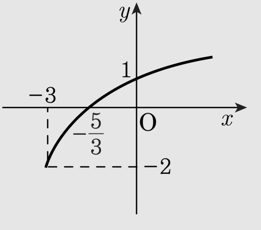
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



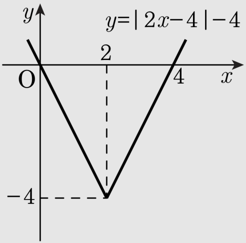
7. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

8. $2x-y+z=0$, $x-2y+3z=0$일 때, $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$ ㉠

$x-2y+3z=0\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ : $3x=z$

$\therefore x=\frac{z}{3},\ y=\frac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\frac{3}{5}$ $\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

9. $0 \le a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1+\frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1-\frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4>0$ 이고 $0<a<2$ 이므로

$a+2>0,\ a-2<0$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} = \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}$$

$\therefore\ a=0$ 일 때 최댓값 2

10. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y=\frac{x+1}{x-1}$ ② $y=\frac{x}{x-1}$ ③ $y=\frac{x-2}{x-1}$

④ $y=\frac{-x}{x-1}$ ⑤ $y=\frac{x+3}{x+1}$

해설

$y=\frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y=\frac{1}{x-a}+b$ 의 꼴로 된 것이다.

$\therefore$ ② $y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

11. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$가 점 $(1,2)$를 지나고 점근선이 $x=2, y=1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$이므로

$$y=\frac{ax+b}{2x+c}=\frac{k}{x-2}+1$$

또 점 $(1,2)$를 지나므로

$$2=\frac{k}{1-2}+1 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore y=\frac{ax+b}{2x+c}=\frac{-1}{x-2}+1=\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-6}{2x-4}$$

$\therefore a=2, b=-6, c=-4$

$\therefore a+b+c=-8$

12. $A=\{(x,y)\mid 0\le y<\sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{(x,y)\mid 2x+y>k\}$에서 $A\cap B=A$ 가 되게 하는 k 의 범위를 구하면?

① $k\le -2$　　② $k<-2$　　③ $k>-2$

④ $k\ge -2$　　⑤ $k\ne -2$

해설

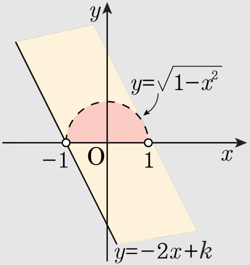
$A\cap B=A \Leftrightarrow A\subset B$ 이므로

그림을 그려 부등식의 영역으로 표시하면

집합 B 에서 $y>-2x+k$ 이므로

점 $(-1,\ 0)$ 를 지날 때, $k=-2$ 이다.

따라서, $A\subset B$ 이려면 $k\le -2$



13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore\ 24 - 6 = 18$ (가지)

14. 함수 $f(x)=x+2$ 에 대하여 $f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3, \cdots\ f\circ f^{99}=f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$$f(x)=x+2$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(x+2) = (x+2)+2 \\ &= x+2\cdot 2 \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x+2\cdot 2) = (x+2\cdot 2)+2 \\ &= x+2\cdot 3 \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

$$f^{100}(x)=x+2\cdot 100$$

$$\therefore\ f^{100}(1)=1+2\cdot 100=201$$

15. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $\left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(f \circ g)^{-1}(3) = a$ 로 놓으면 $(f \circ g)(a) = 3$

$2a - 3 = 3$ 에서 $a = 3$

$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$

$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$

$h^{-1}(3) = b$ 놓으면 $h(b) = 3$

$2b + 1 = 3$

$\therefore b = 1$

$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = h^{-1}(3) = 1$

16. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0) = g(0) = -1$

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

Ⅲ. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ

④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0) = -1,\ g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

Ⅲ. $y = f(x-1) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$

$y = g(x+1) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$

따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

17. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore\ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

18. 임의의 양의 실수 x에 대하여, x를 넘지 않는소수의 개수를 $f(x)$라 하자. 예를 들면 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1,\ f(5) = 3$ 이다.<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(10) = 4$

㉡ 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) < x$ 이다.

㉢ 임의의 양의 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

10 이하의 소수는 $2, 3, 5, 7$ 이므로 $f(10) = 4$

㉡ $f(x) < [x] \leq x$ 이므로 $f(x) < x$

㉢ $x = 2$인 경우 $f(3) = 2, f(2) = 1$이므로 $f(3) \neq f(2)$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

19. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=f(x-2)$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x<2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9)=k$ 라 하면 $g(k)=9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2=9$ 에서 $k=5$

$k<2$ 일 때, $k-2=9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9)=5$

20. $\sqrt{x+2} = x+k$가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는 ? (단, k 는 상수)

① $2 < k < \frac{9}{4}$ ② $2 \le k < \frac{9}{4}$ ③ $k > \frac{9}{4}$

④ $k < 2$ ⑤ $2 < k \le \frac{9}{4}$

해설

$y = \sqrt{x+2} \cdots\cdots\cdots$ ①

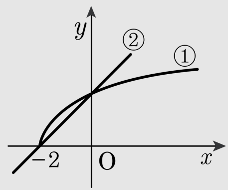
$y = x+k \cdots\cdots\cdots$ ② 라 하면

그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1이고

k 값의 변화에 따라 달라진다.

그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는

경우는



$\sqrt{x+2} = x+k \rightarrow x+2 = (x+k)^2 \rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2=0$

$\rightarrow x^2+(2k-1)x+k^2-2=0 \cdots\cdots\cdots$ ③

①, ②가 서로 접하려면 ③의 $D=0$ 이어야 한다.

$\therefore (2k-1)^2-4(k^2-2)=0,\ 4k^2-4k+1-4k^2+8=0$

$-4k+9=0,\ 4k=9$

$\therefore k = \frac{9}{4}$

또 직선 ②가 $(-2,\ 0)$ 을 지날 경우

$0 = -2+k$

$\therefore k = 2$

따라서 구하는 k 의 범위는 $2 \le k < \frac{9}{4}$