1. 다항식 $2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나눈 나머지는?

① $x-1$　② x　③ 1
④ $x+3$　⑤ $3x-1$

해설

직접 나누어보면

$(2x+1)+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

몫 : $2x+1$, 나머지 : $x-1$

2. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0　② 2　③ −2　④ 4　⑤ −4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times 1\times 2+(-3)\times 2\times 2 = 8+(-12)=-4$

3. 등식 $3x+4=a(x-1)+b(x+1)+3$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=0$　② $a=-1,\ b=2$　③ $a=1,\ b=-2$
④ $a=0,\ b=2$　⑤ $a=1,\ b=2$

해설

우변을 전개하여 좌변과 계수를 비교하면
$a+b=3,\ -a+b+3=4$
연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

4. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{2}{3}$, $f(3)=\frac{3}{4}$, $f(4)=\frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
$f(n)=\frac{n}{n+1}(n=0,1,2,3,4)$
$(n+1)f(n)-n=0$
$g(x)=(x+1)f(x)-x$로 놓으면
$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$
그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.
$\therefore\ g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a\neq 0)\cdots$㉠
그런데, $g(-1)=1$이므로 ㉠에서
$g(-1)=-(5\times4\times3\times2\times1)a=1$
$\therefore\ a=-\frac{1}{(5\times4\times3\times2\times1)}$
$g(x)=(x+1)f(x)-x$
$=-\frac{1}{(5\times4\times3\times2\times1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$g(5)=6f(5)-5=-\frac{(5\times4\times3\times2\times1)}{(5\times4\times3\times2\times1)}=-1$
$\therefore\ f(5)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

5. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$
② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$
④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

6. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$ ② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$ ④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면
준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$
다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

7. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y)로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　　② 1　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

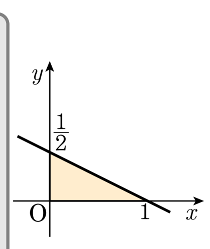
(준식) $=(2x-2y)+(x+2y-1)i=0$

$\therefore x+2y-1=0$,

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}\times 1\times \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{1}{4}$



8. 실수 k에 대하여 복소수 $z=3(k+2i)-k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z=3(k+2i)-k(-2i)$
$\quad=3k+(6+2k)i \Rightarrow$ 순허수
$\therefore\ 3k=0,\ k=0$

9. 다음 등식 $x+y+(2x-y)i=2+7i$를 만족하는 두 실수 x, y에 대하여 xy값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3　② -3　③ 0　④ 5　⑤ -5

해설

$x+y+(2x-y)i=2+7i$
$\Rightarrow x+y-2+(2x-y-7)i=0$
$\Rightarrow x+y-2=0, 2x-y-7=0$
연립하면, $x=3,\ y=-1$

10. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수) 라 하면
$z^2 = \bar{z}$ 에서 $(a+bi)^2 = a - bi$
$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$
$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$
$\therefore b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$
i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$
ii) $a = -\frac{1}{2}$일때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ $\quad \therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore \ z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
따라서 모든 z의 합은 0이다.

11. 다음은 인수분해를 이용하여 이차방정식을 푼 것이다. ㉮에 알맞은 것은?

$11x^2-13x+2=0$
$(11x-2)($ ㉮ $)=0$
$x=\frac{2}{11}$ 또는 $x=1$

① $x-2$ ② $x-1$ ③ $x+1$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

x에 대한 이차방정식
$11x^2-13x+2=0$
$(11x-2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=\frac{2}{11}$ 또는 $x=1$
따라서 ㉮는 $x-1$

12. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

㈎ 두 근의 차는 홀수이다. ㈏ 적어도 한 근은 소수이다. ㈐ p^2-q는 소수이다. ㈑ $p+q$는 소수이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=p \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=q \quad \cdots\cdots$ ㉡이다.
그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.
$\therefore$ ㉠에서 $1+q=p \quad \therefore\ p-q=1$
그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$일 때 뿐이다.
$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1,\ 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

13. 두 점 $(-4,\ 1)$, $(2,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(0,\ -1)$ ② $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2,\ 2)$

해설

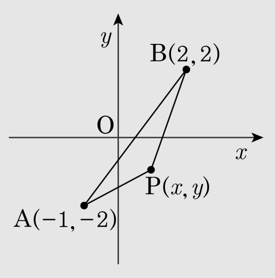
y축 위의 점을 $(0,\ \alpha)$라 하면
$\sqrt{4^2+(\alpha-1)^2}=\sqrt{2^2+(\alpha-3)^2}$
$\therefore\ \alpha=-1$
$\therefore$ y 축 위의 점 : $(0,-1)$

14. x, y 가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$ 의 최솟값은?

① 3　　② $3\sqrt{2}$　　③ 5　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ 6

해설

다음 그림에서



$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$
$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$
$=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5$ 이므로
구하는 최솟값은 5 이다.

15. 좌표평면 위의 세 점 $A(3,\ 4)$, $B(0,\ 0)$, $C(8,\ -8)$에 대하여 $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$ ② $\left(\frac{20}{9},\ -\frac{20}{9}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{11},\ -\frac{15}{11}\right)$
④ $\left(\frac{25}{13},\ -\frac{25}{13}\right)$ ⑤ $\left(\frac{28}{17},\ -\frac{28}{17}\right)$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2+(-8-4)^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$
$\angle BAC$ 의 이등 분선이 선분 BC 와 만나는 교점을 $D(x, y)$ 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$
따라서, 점 $D(x, y)$는 선분 BC 를 5 : 13 으로 내분하는 점이므로
$x = \frac{5\cdot 8 + 13\cdot 0}{5+13} = \frac{20}{9}$,
$y = \frac{5\cdot(-8)+13\cdot 0}{5+13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$
$\therefore\ D\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$

16. 두 직선 $y = ax + 2$, $y = 4x + b$ 의 그래프가 모두 점 $(1,\ -2)$ 를 지날 때, 기울기가 ab 이고 y 절편이 $a + b$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -24x + 10$ ② $y = 24x - 10$ ③ $y = 24x + 10$
④ $y = 12x - 10$ ⑤ $y = 12x + 10$

해설

$y = ax + 2$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = a + 2$
$\therefore a = -4$
$y = 4x + b$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = 4 + b$
$\therefore b = -6$
$\therefore ab = 24$, $a + b = -10$
$\therefore$ 구하는 직선의 방정식 : $y = 24x - 10$

17. 세 점 A(2, 3), B(−1, 9), C(−4, a) 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6　　② 9　　③ 12　　④ 15　　⑤ 17

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기 : $\dfrac{3-9}{2-(-1)} = -2$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기 : $\dfrac{a-3}{(-4)-(2)}$ $\therefore\ a = 15$

18. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다 ② 1 개 ③ 2 개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-y) = 0$

$\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x-1)^2 - y^2 = 0$

$(x+y-1)(x-y-1) = 0$

$\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$

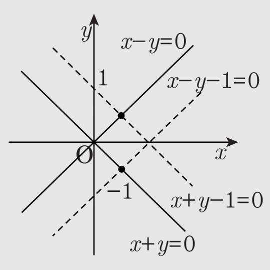
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는

두 직선 $x + y = 0$, $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 는 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $x - y = 0$

위의 점이므로 다음 그림에서

교점의 개수는 2개



19. $2x+(a+3)y-1=0$, $(a-2)x+ay+2=0$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하는 상수 a의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

두 직선 $2x+(a+3)y-1=0$,

$(a-2)x+ay+2=0$이 평행해야 하므로

$$\frac{2}{a-2}=\frac{a+3}{a}\neq\frac{-1}{2}$$

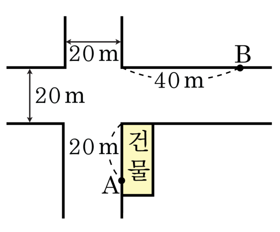
$(a-2)(a+3)=2a$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $\frac{a+3}{a}\neq\frac{-1}{2}$에서 $a\neq-2$이므로

구하는 a의 값은 3이다.

20. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)

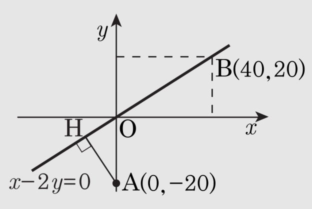


① $2\sqrt{10}$　② $4\sqrt{10}$　③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$　⑤ $10\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각(0, −20), (40, 20) 이다. 이때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$



사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=8\sqrt{5}$