

1. 길이가 3인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

길이가 3인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A는 A(3)
이 선분을 2:1로 내분하는 점을 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1} = 2$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2 - 1} = 6$$

따라서 $\overline{PQ} = 6 - 2 = 4$

2. 점 A(-2, 1), B(4, 4) 를 이은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 (1, 0) 에서 직선 l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}\right) = (2, 3)$$

$$\text{직선 AB 의 기울기는 } \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

(2, 3)을 지나므로 $l : y - 3 = -2(x - 2)$

$$\therefore 2x + y - 7 = 0$$

따라서 (1, 0) 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

3. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

4. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

5. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

6. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

7. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

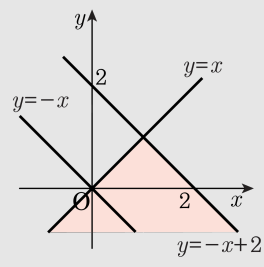
따라서 공통접선은 3 개이다.

8. 좌표평면에서 연립부등식 $y < x$, $x + y < 2$, $y > ax$ 의 영역이 삼각형의 내부를 나타내도록 실수 a 의 값의 범위를 정하면?

- ① $-3 < a < -1$ ② $-2 < a < 0$ ③ $-1 < a < 1$
④ $0 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

연립부등식 $y < x$, $x + y < 2$ 의 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



$y > ax$ 의 영역은 직선 $y = ax$ 의 위쪽 부분이므로 세 영역으로 둘러싸인 부분이 삼각형의 내부가 되려면 a 의 범위는 $-1 < a < 1$ 이 된다.

9. 세 점 A(2, 4), B(-2, 2), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (0, 2)일 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.
- ① 정삼각형
② 직각삼각형
③ $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형
④ $\overline{AB} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형
⑤ 알 수 없다.

해설

무게중심의 좌표가 (0, 2)이므로

$$\frac{2 + (-2) + a}{3} = 0, \frac{4 + 2 + b}{3} = 2$$

$$\therefore a = 0, b = 0$$

$$\therefore C(0, 0)$$

$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\{0 - (-2)\}^2 + (0 - 2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - 4)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

10. 세 점 A(0,0) B(1,1) C(0,2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

㉠ (0,1)

㉡ (1,0)

㉢ (0,-1)

㉣ (-1,0)

㉤ (1,-1)

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\triangle ABC$ 의 외심은 빗변인 $\overline{AC}$ 의 중점이다.

$\therefore$ 외심은 (0,1)

11. 세 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

P(x, y)라 두면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

12. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

13. 직선 $3x - 4y = 0$ 과 평행이고, 점 $(2, 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

- ① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0, 1)$
④ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0, 3)$

해설

직선 $3x - 4y = 0$ 과 평행한 직선을 $3x - 4y + k = 0$ 이라 놓으면

$$\frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1, |2 + k| = 5 \therefore k = 3 \quad (\because y \text{ 절편은 양수})$$

따라서 직선 $3x - 4y + 3 = 0$ 의 y 절편은 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

14. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

15. 좌표평면 위의 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다.
- 점 $\left(\frac{a}{b}, a + b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?
- ① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

해설

점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a, -b)$ 이고,
이 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b, a)$
이다.

즉, 점 $(-b, a)$ 가 제4 사분면의 점이므로

$$-b > 0, a < 0 \quad \therefore a < 0, b < 0$$

따라서 $\frac{a}{b} > 0, a + b < 0$ 이므로 점 $\left(\frac{a}{b}, a + b\right)$ 는

b
제4사분면에 존재한다.

16. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f : (x, y) \rightarrow (x-a, y-1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y+1) = (x+a)^2 - 2(x+a)$
 $y = x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
 y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
 $x^2 + (2a-4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x 좌표를 x_1, x_2 라 하면
 $x_1 + x_2 = -(2a-4)$
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a-4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

17. 점 $(1, 2)$ 를 직선 $y = 2x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, 실수 a, b 에 대하여 $5(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2} \right)$$

이 점이 직선 $y = 2x + 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2} = 2 \cdot \frac{1+a}{2} + 1$$

$$\therefore 2a - b = -2 \quad \text{.....㉠}$$

또한, 두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 지나는 직선이

직선 $y = 2x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1} = -\frac{1}{2}$$

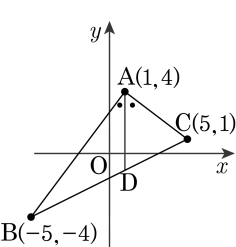
$$\therefore a + 2b = 5 \quad \text{.....㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{5}, b = \frac{12}{5}$$

$$\text{따라서, } 5(a + b) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{12}{5} \right) = 5 \cdot \frac{13}{5} = 13$$

18. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

19. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x = -2$, $y = -1$

② $x = 1$, $y = 1$

③ $x = -1$, $y = 1$

④ $x = 1$, $y = -1$

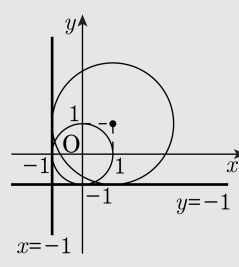
⑤ $x = -1$, $y = -1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이

존재하고 그 식은 각각

$x = -1$, $y = -1$



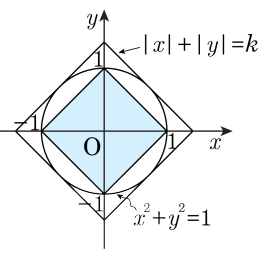
20. 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \leq k$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $x^2 + y^2 \leq 1$ 를 만족한다고 할 때, 상수 k 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + y^2 \leq 1$ 은 원의 경계를 포함한 내부이고
 $|x| + |y| \leq k$ 은 변의 길이가 모두 같은 마름모의 경계를 포함한 내부이므로

$x^2 + y^2 \leq 1$ 이 $|x| + |y| \leq k$ 일 때 k 의 최댓값은 1이다.



21. 연립부등식 $\begin{cases} y - \sqrt{3}|x| + 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 2y \leq 0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

- ① π
- ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ $\frac{\pi}{3}$
- ④ $\frac{\pi}{6}$
- ⑤ $\frac{\pi}{9}$

해설

$$\begin{cases} y \geq \sqrt{3}|x| - 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

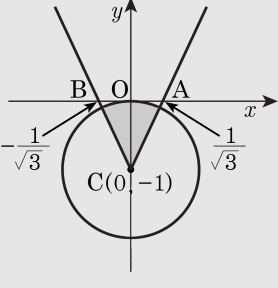
그림으로 나타내면 직선의 기울기가 $\pm \sqrt{3}$ 이므로

$$\angle ACO = \angle BCO = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ$$

원의 넓이는 π 이므로 구하는 영역의 넓이는

$$\pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$$



22. 연립부등식 $0 \leq y \leq x$, $y \leq -x + 2$ 를 만족하는 x, y 의 값에 대하여 $y - x^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때 $M \times m$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = x \cdots \textcircled{1}$
 $y = -x + 2 \cdots \textcircled{2}$
 $y - x^2 = k$ 라 두면 $y = x$ 에 접할때가
최대가 되고
 $P(2, 0)$ 를 지날 때 최소가 된다.
 $\therefore x^2 - x + k = 0$ 의 $D = 1 - 4k = 0$
 $\therefore k = \frac{1}{4}$ (최댓값)
 $\therefore m = -4, M = \frac{1}{4}$
 $\therefore M \times m = -1$

23. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

A(0, 0), B(0, -2),
D(2, 0), P(a, b) 라고하면 $2 \cdot \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 이므로
 $2 \cdot (a^2 + b^2)$
 $= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$
 $0 = b - a + 4$
 $\therefore P(a, b) = (a, a-4)$
점 P의 자취는 $b = a - 4$ ($0 < a < 2$)
와 같으므로
구하는 길이는 두 점 (0, -4) 아 (2, -2)
사이의 거리와 같다.
 $\therefore \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$

24. 좌표평면 위의 점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가

$m(m$ 은 정수)인 직선의 방정식은

$$y - 5 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$$

①의 x 절편은 $-5 = m(x - 3)$

$$\therefore x = 3 - \frac{5}{m}$$

①의 y 절편은 $y - 5 = -3m \therefore y = 5 - 3m$

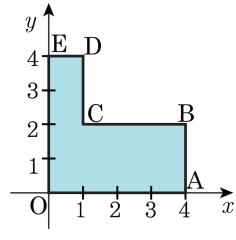
이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함)이어야 한다.

$$\therefore m = 1, 5, -1, -5$$

따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은

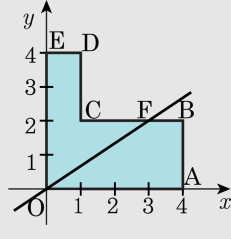
4개이다

25. 아래 그림과 같이 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$, $C(1, 2)$, $D(1, 4)$, $E(0, 4)$ 를 꼭지점으로 하는 도형의 넓이를 직선 $y = ax$ 가 이등분할 때, a 의 값은?



- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ 1

해설



어두운 부분의 넓이가 10이고, 직선 $y = ax$ 로 이등분되므로 점 F의 좌표를 $(k, 2)$ 라 하면

사다리꼴 OABF의 넓이는 $\frac{1}{2} \{4 + (4 - k)\} \times 2 = 5$

$\therefore k = 3$ 따라서, 기울기는 $\frac{2}{3}$ 이다.