1. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2} = i$$
$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} = i^{2008}$$
$$= (i^4)^{502} = 1$$

2. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$ 또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6\mathrm{a}+9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

4. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2+b-3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

5. 두 복소수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha+\beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i)\odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1　　② $-i$　　③ i

④ $1-i$　　⑤ $-1+i$

해설

$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha+\beta)i$이므로

$z = x + yi$ (단, $x,\ y$는 실수)라 하면

$(1+i)\odot(x+yi)$

$= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$

$= x - y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$

$= x - 2y - 1 + (2x+y+1)i = 1$

$\therefore\ x - 2y - 1 = 1 \cdots$ ㉠, $2x + y + 1 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x = 0,\ y = -1$　　$\therefore\ z = -i$

6. $x = 1 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 - 2x + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x = 1 - \sqrt{3}i$ 에서

$x - 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면

$(x-1)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$

$x^2 - 2x = -4$ 이므로

$x^2 - 2x + 1 = -4 + 1 = -3$

7. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9 ② -5 ③ 3 ④ 6 ⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.

$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10$ $\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

8. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

9. 이차방정식 $x^2 - mx + 91 = 0$의 두 근, α, β는 서로소이다. 이때, 실수 m의 값은? (단, α, β 는 $\alpha > 1$, $\beta > 1$인 자연수)

① 10 ② 20 ③ 35 ④ 55 ⑤ 100

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = 91$
α와 β가 서로소이고 자연수이므로
$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 91)$ 또는 $(7,\ 13)$ 이다.
여기서 $\alpha > 1,\ \beta > 1$이므로
$(\alpha, \beta) = (7, 13)$
$\therefore m = \alpha + \beta = 20$

10. 이차방정식 $9x^2-2kx+k-5=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha+2$이므로

$$\alpha+\alpha+2=\frac{2k}{9} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2)=\frac{k-5}{9} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{9}-1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$\therefore\ k=12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\frac{\sqrt{(2k)^2-4\cdot 9(k-5)}}{|9|}=2$에서

$\sqrt{4k^2-36(k-5)}=18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2-9k-36=0$ $\therefore\ k=12,\ -3$

11. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

12. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

13. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m+2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

14. 이차방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3\times\frac{2}{3}=2$