

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

3. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

4. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

5. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

6. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$ 이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -115$ 일 때, 자연수 k 의 값은?

① 43

② 44

③ 45

④ 46

⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$ 이므로

$$a_n = 23 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 26$$

$$-3k + 26 = -115 \text{ 에서 } -3 = -141$$

$$\therefore k = 47$$

7. $a_1 = 1$, $4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 일반항 a_n 을 구하면?

① $\frac{1}{n}$

② $\frac{1}{2n-1}$

③ $\frac{1}{3n-2}$

④ $\frac{1}{4n-3}$

⑤ $\frac{1}{5n-4}$

해설

$4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 a_na_{n+1} 로 나누면

$$4 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n-3$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4n-3}$$

8. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 를 만족할 때, $S_5 = a_1 + a_2 + \dots + a_5$ 의 값은?

① 31 ② 63 ③ 127 ④ 255 ⑤ 511

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$

이므로 1 이고, 공비는 2이다.

$$\therefore S_5 = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$$

9. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\vdots$$
$$+ \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right.$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2^1 a_1$$

$$a_3 = 2^2 a_2$$

$$a_4 = 2^3 a_3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_{10} = 2^{50} \text{ 이므로 } 2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = 2^5 = 32$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 이 성립하고 $a_1 = 1$ 일 때, $a_{10} + 1$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ 에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$ 이므로 $\alpha = -1$

$\therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$ 이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

12. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

13. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\ominus)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\omin�)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\omin�)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\omin�$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.
 $\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$
 $\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$
 $\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$

14. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 4$, (우변) $= 2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여
성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

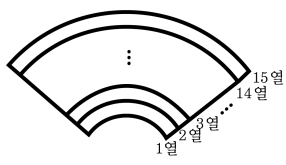
④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성
립한다.

15. 다음 그림과 같이 관람석이 전체 15열로 이루어진 극장이 있다. 제 n 열의 좌석 수를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_{n+1} = a_n + 1$ 을 만족한다. 제 1열의 좌석 수가 30일 때, 이 극장의 총 좌석 수는?



- ① 1100 ② 555 ③ 430 ④ 330 ⑤ 290

해설

$a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 1인 등차수열이다.

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1) \cdot 1$$

$$= n + 29 (\because a_1 = 30)$$

따라서, 총 좌석 수는

$$\sum_{k=1}^{15} (k + 29) = \frac{15 \cdot 16}{2} + 29 \cdot 15 = 555$$

16. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족
시킬 때, a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{9}{4}$
- ② $\frac{11}{4}$
- ③ $\frac{13}{4}$
- ④ $\frac{15}{4}$
- ⑤ $\frac{17}{4}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변에 } n = 1, 2, 3, \dots, n \text{을 대입하여 변끼리 곱하면}$$

$$a_2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 4}{3^2} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot 5}{4^2} a_3$$

$$\vdots$$

$$\times \Bigg) a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} a_{n-1}$$

$$\therefore a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2n} \cdot a_1$$

$$a_1 = 5 \text{를 대입하면 } a_n = \frac{5(n+1)}{2n}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{4}$$

17. 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이차방정식 $x^2 - a_nx + a_{n+1} = 0$ 의 두 근 α_n, β_n 이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$ 을 만족시킨다고 할 때, a_7 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 445

해설

이차방정식 $x^2 - a_nx + a_{n+1} = 0$ 의 근과 계수의 관계에서
 $\alpha_n + \beta_n = a_n, \alpha_n\beta_n = a_{n+1}$
이때, 두 근 α_n, β_n 이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$ 을 만족시키므로
 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$ 에서 $\alpha_n\beta_n - 2(\alpha_n + \beta_n) + 4 = 7$
 $a_{n+1} - 2a_n + 4 = 7$
즉, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ 이고 $a_1 = 4$ 이므로
 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ 에서
 $a_n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1} \quad \therefore a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3$
 $\therefore a_7 = 7 \cdot 2^6 - 3 = 445$

18. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

- I. $a_1 = 3$
II. a_{n+1} 은 a_n^2 을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값은?

- ① 20
- ② 24
- ③ 35
- ④ 40
- ⑤ 42

해설

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 4 \\ a_4 &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$
$$\therefore, \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$$

19. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이 성립하고 $a_6 = 62$ 라 할 때, $a_1 + a_2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$$

$$\therefore 3a_1 + 5a_2 = 62$$

a_1, a_2 의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$ 이므로

$$a_1 = 4, a_2 = 10$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 14$$

20. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 홀수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

홀수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(1)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 홀수이면 그 다음 홀수는 $k + 2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 2)$ 가 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 1, \quad b = 2$
 $\therefore a + b = 3$