1. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i) $P(\boxed{(\text{가})})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(\text{나})})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k　　② 0, $k+1$　　③ 0, $k-1$

④ 1, k　　⑤ 1, $k+1$

2. $a_1 = 4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 성립할 때, 제 5항은?

① 678 ② 708 ③ 738 ④ 768 ⑤ 798

3. $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

답: ________

4. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

5. $a_1 = p,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{a_n + 1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$로 정의되는 수열이 있다.
다음 중 임의의 양수 p에 대하여 $a_n = p$가 되도록 하는 n의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

6. 양의 정수 n에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$이라 할 때 다음은
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n\{p(n) - 1\}$ $(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$일 때 (좌변)$= p(1) = 1$
(우변)$= 2\{p(2) - 1\} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$이므로 성립한다.
(ii) $n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k\{p(k) - 1\}$
$p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (㉠)p(k) - k$
$= (㉠)\{p(k+1) - ㉡\} - k$
$= (k+1)\{p(k+1) - 1\}$ 이므로 $n = k+1$일 때 성립한다.
따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k,\ \frac{1}{k}$
② $k,\ \frac{1}{k+1}$
③ $k+1,\ \frac{1}{k}$
④ $k+1,\ \frac{1}{k+1}$
⑤ $k+2,\ \frac{1}{k}$

7. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^{3}을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4} \\ &= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)$의 값을 구하여라.

답: ________

8. 다음은 $n \ge 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \ge 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \ge 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \ge 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$
② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$
④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

9. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= 2^{1-1}(1+3) = 4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

10. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

I. $a_1 = 3$ II. a_{n+1}은 ${a_n}^2$을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 35 ④ 40 ⑤ 42

11. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

답: ________

12. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

13. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 홀수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

14. 모든 자연수 n에 대하여 $6^n - 5n - 1$은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\boxed{}$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

> $6^n - 5n - 1$은 25의 배수이다. $\cdots\cdots$ ㉠
>
> (i) $n = 1$일 때, $6 - 5 - 1 = 0$이므로 $\boxed{}$의 배수이다.
> 따라서 $n = 1$일 때, ㉠이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$이 25의 배수이면
> $6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \boxed{}(6^k - 5k - 1) + 25k$는 $\boxed{}$의 배수이므로 $n = k + 1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
> 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답: ________

15. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$= \dfrac{5+3}{2} = 4$, (우변)$= 4^1 = 1$
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\dfrac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$
> 위의 식의 양변에 4를 곱하면
> $4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$
> 이므로
> $\dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2}$
> $= \dfrac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k,\ 5^k-3^k$　② $4^{k+1},\ 5^k-3^k$
③ $4^k,\ 5^k+3^k$　④ $4^{k+1},\ 5^k+3^k$
⑤ $4^{k+1},\ 5^{k+1}-3^{k+1}$

16. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{51} - a_1$　② $a_{51} - a_2$　③ $a_{51} + a_1$

④ $a_{52} - a_2$　⑤ $a_{52} + a_2$

17. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{100} - a_{50}$　　② $a_{101} - a_{50}$　　③ $a_{101} - a_{51}$

④ $a_{102} - a_{51}$　　⑤ $a_{102} - a_{52}$

18. $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의될 때, a_{15}의 값은?

① $\dfrac{1}{17}$ ② $\dfrac{1}{21}$ ③ $\dfrac{1}{29}$ ④ $\dfrac{1}{31}$ ⑤ $\dfrac{1}{39}$

19. $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{3}{7},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

답: ________

20. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변) 이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$
> 위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$
> 즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> 따라서, (i),(ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+1}{2k+3}$
② $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+1}{2k+3}$
④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+3}{2k+3}$