

1. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\boxed{\overline{(가)}})$ 이 참이다.

(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{\overline{(나)}})$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① 0, k

② 0, $k + 1$

③ 0, $k - 1$
- ④ 1, k

⑤ 1, $k + 1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\boxed{1})$ 이 참이다.
- (ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{k+1})$ 도 참이다.

2. $a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이 성립할 때, 제 5항은?

① 678

② 708

③ 738

④ 768

⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이고 $a_{n+1} = 3S_n$ 이므로

$$S_{n+1} - S_n = 3S_n$$

$$\therefore S_{n+1} = 4S_n$$

이때, $a_1 = S_1 = 4$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$$

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$$

3. $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$\vdots$

$$\therefore a_1 = a_6 = a_{11} = \dots = 3$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = \dots = 2$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = \dots = 1$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = \dots = 1$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = \dots = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$$

$$= 13 \times 9 + 3 = 120$$

4. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

- ① $\frac{1}{n}$ ② $\frac{1}{n+1}$ ③ $\frac{1}{n+2}$ ④ $\frac{2}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1, \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1인 등차 수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \frac{1}{n}$$

5. $a_1 = p, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열이 있다.
다음 중 임의의 양수 p 에 대하여 $a_n = p$ 가 되도록 하는 n 의 값은?

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$$a_1 = p, a_2 = -\frac{1}{p+1},$$

$$a_3 = \frac{-1}{-\frac{1}{p+1} + 1} = -\frac{p+1}{p},$$

$$a_4 = \frac{-1}{-\frac{p+1}{p} + 1} = p, a_5 = -\frac{1}{p+1}, \dots$$

$$\therefore a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{22} = a_{25} = \dots = p$$

$$\text{즉, } n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ 이면 } a_n = p \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_{22} = p$$

6. 양의 정수 n 에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n \{p(n) - 1\}$ ($n = 2, 3, 4, \cdots$) 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때 (좌변) $= p(1) = 1$
 (우변) $= 2 \{p(2) - 1\} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$ 이므로 성립한다.
 (ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$
 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (\ominus)p(k) - k$
 $= (\ominus) \{p(k+1) - \textcircled{\cup}\} - k$
 $= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$ 이므로 $n = k+1$ 일 때 성립한다.
 따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$, $\textcircled{\cup}$ 에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① $k, \frac{1}{k}$ ② $k, \frac{1}{k+1}$ ③ $k+1, \frac{1}{k}$
 ④ $k+1, \frac{1}{k+1}$ ⑤ $k+2, \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면
 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$ 이고,
 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k \{p(k) - 1\} + p(k)$
 $= (k+1)p(k) - k$
 $= (k+1) \left\{p(k+1) - \frac{1}{k+1}\right\} - k$
 $= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$
 $\therefore \ominus : k+1, \textcircled{\cup} : \frac{1}{k+1}$

7. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\ominus)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\ominus)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\ominus)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ 이 성립한다.}$$

위의 증명 과정에서 $\ominus$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\ominus$ 에 들어갈 식을 $g(m)$

이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ 이 성립한다.}$$

$$\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$$

$$\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$$

$$\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$$

8. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

㉠ $n = 1, k^2$

㉡ $n = 1, (k+1)^2$

㉢ $n = 5, (k-1)^2$

㉣ $n = 5, k^2$

㉤ $n = 5, (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore$ ㉠ $n = 5, \text{㉡} (k+1)^2$

9. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 4, (우변) = $2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로
주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여
성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성
립한다.

10. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

- I. $a_1 = 3$
II. a_{n+1} 은 a_n^2 을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값은?

- ① 20
- ② 24
- ③ 35
- ④ 40
- ⑤ 42

해설

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 4 \\ a_4 &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$
$$\therefore, \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$$

11. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이 성립하고 $a_6 = 62$ 라 할 때, $a_1 + a_2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$$

$$\therefore 3a_1 + 5a_2 = 62$$

a_1, a_2 의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$ 이므로

$$a_1 = 4, a_2 = 10$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 14$$

12. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

자연수는 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열을 이루므로 $p(1)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 자연수이면 그 다음 자연수는 $k + 1$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 1)$ 이 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 1, \quad b = 1$
 $\therefore a + b = 2$

13. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 홀수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

홀수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(1)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 홀수이면 그 다음 홀수는 $k + 2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 2)$ 가 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 1, \quad b = 2$
 $\therefore a + b = 3$

14. 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\square$ 안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

$6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수이다.㉠

(i) $n = 1$ 일 때, $6 - 5 - 1 = 0$ 이므로 $\square$ 의 배수이다.
따라서 $n = 1$ 일 때, ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$ 이 25의 배수이면

$6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \square(6^k - 5k - 1) + 25k$ 는 $\square$ 의 배수이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$$25 + 6 + 25 = 56$$

15. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\frac{5^n + 3^n}{2} \geq 4^n$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= \frac{5+3}{2} = 4$, (우변) $= 4^1 = 4$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{5^k + 3^k}{2} \geq \boxed{(가)}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
 $4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{(가)}$
이므로
 $\frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2}$
 $= \frac{\boxed{(나)}}{2} \geq 0$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $4^k, 5^k - 3^k$

② $4^{k+1}, 5^k - 3^k$

③ $4^k, 5^k + 3^k$

④ $4^{k+1}, 5^k + 3^k$

⑤ $4^{k+1}, 5^{k+1} - 3^{k+1}$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{5^k + 3^k}{2} \geq \boxed{4^k}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
 $4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{4^k}$
이므로
 $\frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2}$
 $= \frac{\boxed{5^k - 3^k}}{2} \geq 0$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

16. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음

중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

- ① $a_{51} - a_1$
- ② $a_{51} - a_2$
- ③ $a_{51} + a_1$

- ④ $a_{52} - a_2$
- ⑤ $a_{52} + a_2$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$a_1 = a_3 - a_2$

$a_2 = a_4 - a_3$

$\vdots$

$$+) \frac{a_{50} = a_{52} - a_{51}}{\sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2}$$

17. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

① $a_{100} - a_{50}$

② $a_{101} - a_{50}$

③ $a_{101} - a_{51}$

④ $a_{102} - a_{51}$

⑤ $a_{102} - a_{52}$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

(i) $a_1 = a_3 - a_2$
 $a_2 = a_4 - a_3$

$\vdots$

+) $\frac{a_{100} = a_{102} - a_{101}}{\sum_{k=1}^{100} a_k = a_{102} - a_2}$

(ii) $a_1 = a_3 - a_2$
 $a_2 = a_4 - a_3$

$\vdots$

+) $\frac{a_{50} = a_{52} - a_{51}}{\sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2}$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=51}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{50} a_k \\ &= (a_{102} - a_2) - (a_{52} - a_2) \\ &= a_{102} - a_{52} \end{aligned}$$

18. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, a_{15} 의 값은?

- ① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1} \text{ 에서 양변에 역수를 취하면 } \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{ 이라 두면 } b_{n+1} = b_n + 2, b_1 = 3$$

$$\text{따라서, } b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n + 1}$$

$$\therefore a_{15} = \frac{1}{31}$$

19. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

20. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = $\frac{1}{3}$ = (우변) 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}$

위의 식의 양변에 ㉠을 더하면

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + [㉠] = [㉡]$

즉, $n = k + 1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

- ① $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+1}{2k+3}$

② $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+2}{2k+3}$

③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$

④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+2}{2k+3}$

⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$ 의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면
(우변) = $\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
= $\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$
= $\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$