

1. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

2. 원 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① (2, -1)

② (3, -2)

③ (2, -2)

④ (-1, -2)

⑤ (3, -1)

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면

$$a(-6x + 2y + 20) + (x^2 + y^2 - 10) = 0$$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \rightarrow y = 3x - 10 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 10 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②를 연립하면

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$

4. x 에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는?

- ① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots \text{①}$$

$x+1$ 과 $x-1$ 이 서로 소이므로

$x+1$ 은 $g(x)$ 의 인수이다.

따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots \text{②}$ 로 놓으면

$$\text{①에서 } f(x) = (x-1)h(x) \cdots \text{③}$$

②와 ③에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는

$$(x-1)(x+1)h(x) \text{ 즉, } (x-1)g(x)$$