1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$　　② $1 < k < 3$

③ $k < 3$　　④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

3. 포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2-2kx+2k+3=0$ 의 두 근이므로 두 근을 $\alpha,\ \beta$
라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k+3$
$|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 이므로
$20=(2k)^2-4(2k+3),\ 4k^2-8k-12=20$

$k^2-2k-8=0$
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$k^2 - 2k - 8 < 0,\ (k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, k값 중 정수인 것은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다.

5. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$

② $k < -2$ 또는 $k > 2$

③ $k < -1$ 또는 $k > 1$

④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$

⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$

$D = K^2 - 16 > 0$이어야 하므로 $(k+4)(k-4) > 0$

$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

6. 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 x 축에 접하도록 실수 a, b 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점의 x 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
a, b 는 실수이므로 $a=1$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

7. 포물선 $y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 서로 만나지 않을 때의 k 의 범위를 구하면?

① $k < \frac{1}{2}$ ② $k < -\frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{4}$

④ $k < \frac{1}{4}$ ⑤ $k > -\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과
만나지 않으려면 판별식D 가
$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k < 0$$

$$\therefore\ k > \frac{1}{4}$$

8. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$이
서로 다른 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

$8 - k^2 - 2k > 0$, $(k+4)(k-2) < 0$

$\therefore\ -4 < k < 2$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, 0, 1$이다.

$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0, \quad (k+1)(k-1) \geq 0$
$\therefore \ k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$D_2 = k^2 + 8k < 0, \quad k(k+8) < 0$
$\therefore \ -8 < k < 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k는 $-7, \ -6, \ \cdots, -2, \ -1$의 7개이다.

10. 부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$이고 $f(x)=ax^2+bx+c$일 때, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$일 때 $a<0$이고,

$$ax^2+bx+c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow ax^2+ax-6a \geq 0$$

$\therefore\ b=a,\ c=-6a$

따라서, $f(x)=ax^2+ax-6a$이므로

$f(x)=0$ 의 두 근은 $-3,\ 2$이다.

즉, $f(-3)=0$ 또는 $f(2)=0$이다.

한편, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 방정식 $f(3x-2)=0$의 실근과 같으므로

$f(3x-2)=0$의 두 근은

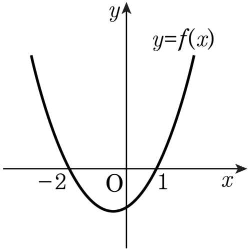
$3x-2=-3$ 또는 $3x-2=2$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

11. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

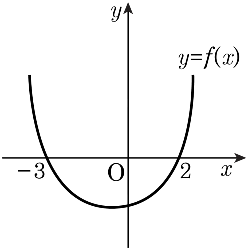
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

12. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



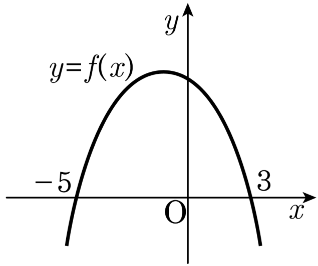
① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은
(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2$ $\therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3$ $\therefore\ x = \pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)\ (a<0)$ 으로 놓으면

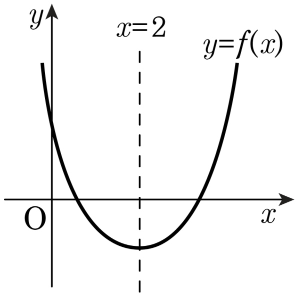
$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

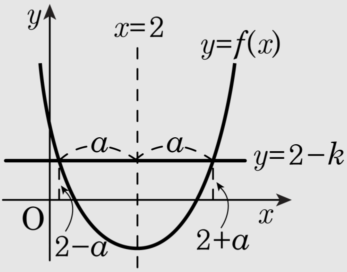
14. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

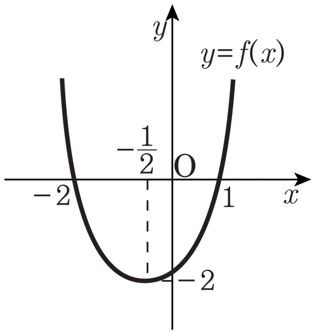
해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ii) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

15. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$$