

1. 다음 중 $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k$ 의 값과 같은 것은?

① $\sum_{k=1}^{10} 2k$

② $\sum_{k=1}^{20} k$

③ $\sum_{k=6}^{10} 5k$

④ $\sum_{k=1}^{10} k^2$

⑤ $\sum_{k=1}^{10} (k^2 + k)$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10) + (2 + 3 + 4 + \cdots + 10) + (3 + 4 + \cdots + 10) + \cdots + 10 \\ &= 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 10 = \sum_{k=1}^{10} k^2 \end{aligned}$$

2. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^5 (k+l) &= \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l \\ \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l+15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425\end{aligned}$$

3. $\sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5

② -7

③ -8

④ -79

⑤ -80

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{80} - \sqrt{81} \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{81} \\ &= 1 - 9 = -8 \end{aligned}$$

4. 다음을 계산하여라.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

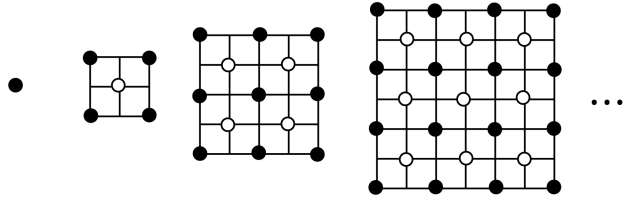
▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 1155 - 110 \\ &= 1045 \end{aligned}$$

5. 10개의 바둑판에 각각 흰 돌과 검은 돌을 다음과 같은 규칙으로 놓았을 때, 이 10개의 바둑판에 놓인 모든 검은 돌의 개수를 S , 흰 돌의 개수를 T 라 하자. 이때, $S - T$ 의 값은?



- ① 36 ② 49 ③ 64 ④ 81 ⑤ 100

해설

n 번째 바둑판에 놓인 검은 돌, 흰 돌의 개수는 각각 $n^2, (n-1)^2$ 이므로

10개의 바둑판에 놓인 검은 돌의 개수의 합 S 는

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$$

10개의 바둑판에 놓인 흰 돌의 개수의 합 T 는

$$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2$$

$$\therefore S - T = 10^2 = 100$$

6. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - n + 3$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 의 값은?

① 82

② 84

③ 86

④ 88

⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\} \\ &= 4n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

7. 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하면?

- ① $\frac{n+2}{2(n+1)}$ ② $\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$
 ③ $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ ④ $\frac{2n+5}{2(n+3)}$
 ⑤ $\frac{2n(n+1)}{(n+3)(n+5)}$

해설

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(k+1)^2-1} = \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \text{의므로} \\ S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right\} + \dots + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

8. 다음 군수열에서 제 10군의 총합은?

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10),...

- ① 154 ② 255 ③ 308 ④ 505 ⑤ 1010

해설

(i) n 군의 항의 개수= n
(ii) n 군의 초항을 구해보자.
1군의 초항= 1
2군의 초항= 2
3군의 초항= 4
4군의 초항= 7
1, 2, 4, 7, 11
 $\begin{matrix} \vee & \vee & \vee & \vee \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$
즉 (n 군의 초항)= $1 + \frac{(n-1)n}{2}$
10군의 초항= $1 + \frac{9 \cdot 10}{2} = 46$
따라서 10군은 초항이 46
공차가 1, 항수가 10인 등차수열
이므로
(10군의 총합)= $\frac{10(2 \cdot 46 + 9 \cdot 1)}{2}$
= $5 \cdot 101 = 505$

9. 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ 에서 제 20 항은?
- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{7}$

해설

제1군 제2군 제3군 제4군

$(1), (\frac{1}{2}, \frac{2}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}), (\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots), \dots$

에서 1군부터 제 5군까지의 항수는

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

따라서, 제 20 항은 제 6군의 5 번째 항이므로

$\frac{5}{6}$ 이다.

10. 다음과 같이 나열된 55개의 수를 모두 더하면?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1^2 \\ & & & & & 1^2 & 1^2 \\ & & & 1^2 & 2^2 & 3^2 & \\ & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 10^2 & \end{array}$$

- ① 1210 ② 1230 ③ 1250 ④ 1270 ⑤ 1290

해설

n 번째 행의 수의 합은

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서, 제 1행에서 제 10행까지의 모든 수의 합은

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} (\sum_{n=1}^{10} 2n^3 + \sum_{n=1}^{10} 3n^2 + \sum_{n=1}^{10} n) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 2 \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 + 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right\} \\ &= 1210 \end{aligned}$$