

1. 등식 $x^2 + 2x + 3 = a(x - 1)^2 + bx + c$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

우변을 전개하여 동류항으로 묶는다.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 3 &= a(x - 1)^2 + bx + c \\ &= ax^2 + (b - 2a)x + a + c\end{aligned}$$

$$a = 1, b - 2a = 2, a + c = 3$$

$$a = 1, b = 4, c = 2$$

$$a + b + c = 7$$

2. 다항식 $x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 일차식 $x - 2$ 로 나눌 때의 나머지는?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \\ &= (x - 2)Q(x) + R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 \\ &= 8 - 8 + 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore R = 4$$

3. 수직선 위의 두 점 $P(2)$, $Q(x)$ 에 대하여 P , Q 두 점 사이의 거리가 4일 때, x 의 값은 2개이다. 이 중에서 2보다 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$x > 2 \text{ 일 때, } x - 2 = 4$$

$$\therefore x = 6$$

4. 두 점 $(0, 0)$, $(4, -3)$ 사이의 거리를 구하면?

① 7

② 6

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$\sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

5. 직선 $x + y = 2$ 위에 있고, 두 점 $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ 에 이르는 거리가 같은 점 P 의 좌표는?

① $(0, 2)$

② $(1, 1)$

③ $(2, 0)$

④ $(3, -1)$

⑤ $(4, -2)$

해설

점 P 의 좌표를 $P(a, 2 - a)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= \sqrt{(a - 2)^2 + (2 - a - 3)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a + 5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{PB} &= \sqrt{(a - 3)^2 + (2 - a - 2)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 6a + 9}\end{aligned}$$

그런데 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 에서

$$2a^2 - 2a + 5 = 2a^2 - 6a + 9$$

$$4a = 4 \text{ 에서 } a = 1$$

$$\therefore P(1, 1)$$

6. 두 점 $A(a, b)$, $B(3, 5)$ 를 이은 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이 $P(c, 9)$ 이고 선분 AB 의 중점이 $M(1, e)$ 일 때, $abce$ 의 값은?

① -10

② 10

③ -21

④ 0

⑤ 21

해설

$$(c, 9) = \left(\frac{2 \times 3 - 1 \times a}{2 - 1}, \frac{2 \times 5 - 1 \times b}{2 - 1} \right)$$

$$(1, e) = \left(\frac{a + 3}{2}, \frac{b + 5}{2} \right)$$

$$\therefore a = -1, b = 1, c = 7, e = 3$$

$$\therefore abce = -21$$

7. 네 점 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$

② $\frac{4}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

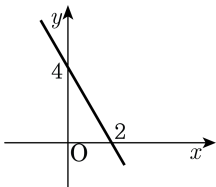
$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

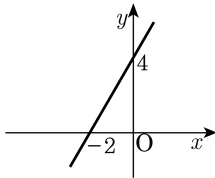
$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

8. 다음 중 기울기가 -2 이고 y 절편이 4 인 직선의 그래프는?

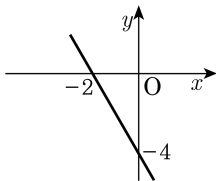
①



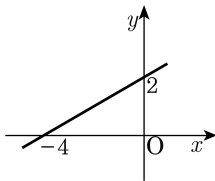
②



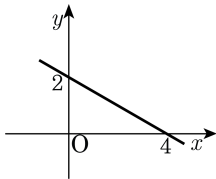
③



④



⑤



해설

y 절편이 4 인 그래프는 ①, ②번 그래프이고,
그 중에서 기울기가 -2 인 그래프는 ①번이다.

9. 점 $(4, 6)$ 을 지나고, x 축에 평행한 직선을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = 6$

해설

점 $(4, 6)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이므로
 $y = 6$

10. 세 점 $(3, 1)$, $(-2 + a, 4)$, $(7, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 7

해설

세 점 $A(3, 1)$, $B(-2 + a, 4)$, $C(7, a)$ 가

동일 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기)이므로

$$\frac{4 - 1}{-2 + a - 3} = \frac{a - 4}{7 - (-2 + a)}$$

$$\frac{3}{a - 5} = \frac{a - 4}{9 - a}$$

$$27 - 3a = a^2 - 9a + 20$$

$$a^2 - 6a - 7 = (a + 1)(a - 7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 양수 a 의 값은 7

11. 좌표평면 위의 네 점 $A(-3, -3)$, $B(3, -3)$, $C(3, 5)$, $D(-3, 5)$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점 E의 좌표는?

① $(-4, 0)$

② $(0, 1)$

③ $(0, 2)$

④ $(1, 2)$

⑤ $(4, 3)$

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 AC의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+5}{2} \right) = (0, 1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상 $(0, 1)$ 을 지난다.

12. 다음 보기의 주어진 직선 중 서로 평행한 것끼리 짝지어진 것은?

보기

㉠ $6x + 3y = 4$

㉡ $2x - y = 1$

㉢ $x = -2y + 1$

㉣ $y = -2x + 5$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉢

해설

각각의 방정식을 y 에 대하여 정리하면

㉠. $6x + 3y = 4$ 에서 $y = -2x + \frac{4}{3}$

㉡. $2x - y = 1$ 에서 $y = 2x - 1$

㉢. $x = -2y + 1$ 에서 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

㉣. $y = -2x + 5$

따라서, 서로 평행한 것은 ㉠, ㉣이다.

13. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 이 직선 $3x + by + 1 = 0$ 과 수직이고, 직선 $x - (b + 3)y + 1 = 0$ 과 평행일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

$$x + ay - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠},$$

$$3x + bx + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x - (b - 3)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \perp \textcircled{㉡} : 1 \cdot 3 + a \cdot b = 0 \text{에서 } ab = -3$$

$$\textcircled{㉠} \parallel \textcircled{㉢} : \frac{1}{1} = \frac{-(b+3)}{a} \neq \frac{1}{-1} \text{에서 } a + b = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$= (-3)^2 - 2 \cdot (-3) = 15$$

14. 평면 위의 한 점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2, 5)$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$(a + 3, b + 2) = (2, 5)$ 이므로, $a = -1, b = 3$ 이다.

따라서 $a + b = 2$

15. 직선 $2x - y + 3 = 0$ 을 x 축 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 이동하면 $2x + ay + b = 0$ 이 된다고 한다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$2x - y + 3 = 0$ 을 x 축 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 2 만큼 이동하면

$2(x + 1) - (y - 2) + 3 = 0$ 이 된다.

이 식을 정리하면 $2x - y + 7 = 0$ 이다.

따라서 $a + b = -1 + 7 = 6$

16. $(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2)$ 를 전개했을 때, x^2 과 x^3 의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned}(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2) \\ = x^5 + bx^4 + (a + 2)x^3 + (ab + 2)x^2 + (2a + 2b)x + 4\end{aligned}$$

$(x^2$ 의 계수) $=$ (x^3 의 계수) $=0$ 이므로

$$ab + 2 = 0, \quad a + 2 = 0$$

따라서 $a = -2, b = 1$

$$\therefore a + b = -1$$

17. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1 + a)x^2 + (1 - a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1 + a) = b, 1 - a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

18. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,

$x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$

따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.

즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫

$Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$$

19. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y) 에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2} \right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2} \right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

20. 두 직선 $3x - 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ 의 교점과 점 $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x - y - 9 = 0$

② $5x + y - 9 = 0$

③ $x - 2y - 1 = 0$

④ $2x - 3y - 1 = 0$

⑤ $2x - y + 3 = 0$

해설

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} : x = 2, y = 1$$

$\therefore$ 교점 : $(2, 1)$

$$\therefore \text{구하는 직선은 } y - 1 = \frac{-4 - 1}{1 - 2}(x - 2) = 5(x - 2)$$

$$\therefore 5x - y - 9 = 0$$

21. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0, 0), (2, 6), (6, 3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

22. 원 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같고, 점 $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2y = 0$

② $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같은 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 2y + k = 0$ 의 꼴이다.

또, 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 + 1 - 2 + k = 0 \quad \therefore k = 0$$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

23. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$

② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$

③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$

③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

24. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4, 4)$ 를 지나며, y 축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

② $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

③ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

④ $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$

⑤ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로

$$b = a + 2 \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 $(4, 4)$ 를 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - b)^2 = a^2 \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(4 - a)^2 + (4 - a - 2)^2 = a^2$

$$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore a = 2, 10$$

$$\therefore a = 2 \text{ 일 때 } b = 4, a = 10 \text{ 일 때 } b = 12$$

따라서 구하는 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4,$$

$$(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$$

25. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

26. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

27. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ()이다. ()안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

28. 좌표평면 위의 점 $(-1, 3)$ 을 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3, 5)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$(-1, 3), (3, 5)$ 의 중점이 (a, b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

29. 직선 $y = 2x$ 에 대하여 점 $P(a, b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R 과 P 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a - 4b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

R 과 $P(a, b)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이므로 $R(b, a)$ 이고

Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로

$Q(b-1, a)$ 이다.

또, P 와 Q 는 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이므로

$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이고 $\overline{PQ}$ 와 $y = 2x$ 는 수

직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{PQ}$ 의 기울기) $= \frac{b-a}{a-b+1} = -\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$ 이고,

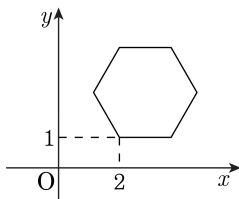
$\frac{a+b}{2} = 2\left(\frac{a+b-1}{2}\right) \dots \textcircled{2}$

①에서 $a - b = 1$

②에서 $a + b = 2$

$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}, 2a - 4b = 3 - 2 = 1$

30. 다음은 한 변의 길이가 2 인 정육각형을 직교 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 여섯 개의 꼭짓점 중 부등식 $x + 5y \geq 10$ 의 영역 안에 있는 점의 개수를 구하여라. (정육각형의 가장 아래 변은 x 축에 평행하고, $\sqrt{3} = 1.7$ 로 한다)



▶ 답:

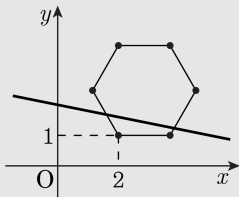
개

▷ 정답: 4개

해설

직선 $x + 5y = 10$ 은 x 절편이 10, y 절편이 2 이므로 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.

따라서 직선의 위부분에 해당하는 꼭짓점의 개수는 4 (개) 이다.



31. 점 $(a, -4)$ 이 곡선 $y = x^2 + 5x$ 의 윗부분에 있도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

점 $(a, -4)$ 가 곡선 $y = x^2 + 5x$ 의 윗부분에 있도록 하기 위해선 $y > x^2 + 5x$ 이어야 한다.

$(a, -4)$ 를 대입하면 $-4 > a^2 + 5a$

즉, $a^2 + 5a + 4 < 0$, $(a + 4)(a + 1) < 0$

$\therefore -4 < a < -1$

$a = -3, -2$ 총 2개

32. 부등식 $y \leq -x^2 + 4$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y = -x^2 + 4$ 의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $P(x, y)$ 중 x, y 가 모두 양의 정수인 것은

(i) $x = 1$ 일 때

$$y \leq -1^2 + 4 = 3 \text{ 이므로 } y = 1, 2, 3$$

(ii) $x = 2$ 일 때

$$y \leq -2^2 + 4 = 0$$

즉, 양의 정수 y 는 존재하지 않는다.

따라서 x, y 가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 의 3개이다.

33. 세 부등식 $x \geq 0, x - 2y + 2 \leq 0, 2x + y - 6 \leq 0$ 을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 5

② $\frac{11}{2}$

③ 6

④ $\frac{13}{2}$

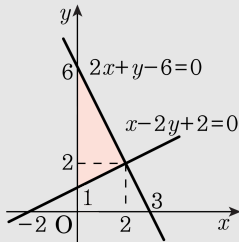
⑤ 7

해설

주어진 세 부등식을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분이다.

이 때, 두 직선 $x - 2y + 2 = 0, 2x + y - 6 = 0$ 의 교점은

점 $(2, 2)$ 이므로 어두운 부분의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$



(단, 경계선 포함)

34. $x^3 + x^2 + 2$ 를 다항식 $x^2 + 2x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $Q(x) + R(x)$ 의 값은?

① $2x - 3$

② $2x$

③ $3x + 2$

④ $4x$

⑤ $4x + 1$

해설

$x^3 + x^2 + 2$ 를 $x^2 + 2x - 1$ 로 직접 나누면

$$Q(x) = x - 1, \quad R(x) = 3x + 1$$

$$\therefore Q(x) + R(x) = 4x$$

35. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

36. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1)(z + 1) \\&= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\&= 7\end{aligned}$$

37. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

① -1

② 1

③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

38. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$ 일 때, abc 의 값은?

① $-\frac{5}{3}$

② 0

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 1

해설

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 이므로}$$

$$5 = 1 - 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 이므로}$$

$$2 - 3abc = 1 \cdot (5 + 2)$$

$$\therefore abc = -\frac{5}{3}$$

39. $a + b - 2c = 1$, $a - b + 3c = 3$ 일 때, 다음 중 $a + ab + c^2$ 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a - 8)(a - 2)$

② $(a + 8)(a - 2)$

③ $-(a - 8)(a - 2)$

④ $-(a - 8)(a + 2)$

⑤ $-(a + 8)(a - 2)$

해설

$$a + b - 2c = 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$a - b + 3c = 3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} \text{에서 } 2a + c = 4$$

$$\therefore c = -2a + 4 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } b = -5 + 9$$

$$\begin{aligned} \therefore a + ab + c^2 &= a + a(-5a + 9) + (-2a + 4)^2 \\ &= -a^2 - 6a + 16 \\ &= -(a^2 + 6a - 16) \\ &= -(a + 8)(a - 2) \end{aligned}$$

40. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0$ 가 서로 외접할 때 상수 k 의 값은?

① $k = -11$

② $k = 0$

③ $k = 9$

④ $k = 16$

⑤ $k = 8$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

중심 $O(1, 1)$, $r = 1$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 25 + k = 0$$

$$\rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 - k$$

중심 $O'(4, -3)$, $r' = \sqrt{25 - k}$

두 원이 외접할 조건은 $\overline{OO'} = r + r'$

이므로

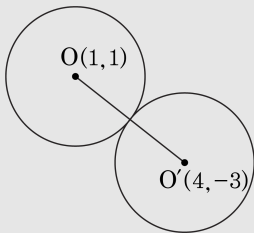
$$\sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 1 + \sqrt{25 - k}$$

$$5 = 1 + \sqrt{25 - k}$$

$$4 = \sqrt{25 - k}$$

$$16 = 25 - k$$

$$\therefore k = 9$$



41. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

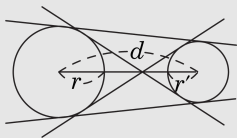
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



42. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 $A(4, 2)$ 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

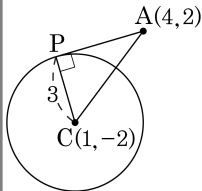
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.

다음 그림에서 접선의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$$

한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$

$$\therefore \overline{AP} = 4$$



43. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

44. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

45. 부등식 $x^2 + y^2 + ax + b \leq 0$ 의 영역이 다음 그림과 같을 때, $a + b$ 의 값은?

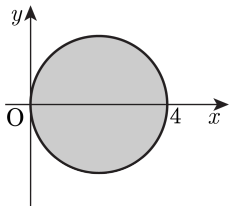
① -1

② 0

③ -2

④ -4

⑤ 4



해설

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 \text{ 의 내부이므로 } x^2 + y^2 - 4x \leq 0$$

$$\therefore a = -4, b = 0, a + b = -4$$

46. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 부등식 $x - y < a$ 의 영역에 포함되도록하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

③ $a \geq 2\sqrt{2}$

④ $a < 2\sqrt{2}$

⑤ $a \geq 3$

해설

원이 부등식의 영역에 포함되어야 하므로 직선 $y = x - a$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 접하거나 아래에 있어야 한다. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x - a$ 에서 방정식 $x^2 + (x - a)^2 = 4$

즉, $2x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2(a^2 - 4) = 0$$

$$a^2 = 8 \quad \therefore a = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 a 의 값의 범위는 $a \geq 2\sqrt{2}$

47. 연립 부등식 $y \geq 2x - 12$, $2x + y \geq 0$, $y \leq 0$ 을 만족하는 실수 x , y 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최댓값은?

① 6

② $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

③ 36

④ 45

⑤ $\frac{144}{5}$

해설

세 부등식의 영역을 좌표 평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

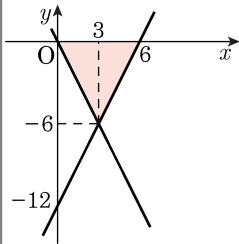
$x^2 + y^2 = k$ 라 하면 점 $(6, 0)$ 을 지날 때,

$x^2 + y^2 = 36$ 이고,

점 $(3, -6)$ 을 지날 때,

$x^2 + y^2 = 9 + 36 = 45$ 이므로

$x^2 + y^2$ 의 최댓값은 45



48. 500 평의 밭을 가지고 있는 농부가 상추와 고추를 재배하려고 한다. 한 평당 씨를 뿌리고 경작하여 수확하는 데 드는 노동 시간이 상추는 3시간, 고추는 2시간이 든다고 한다. 이 농부가 일할 수 있는 총 노동 시간은 1200시간 이며, 한 평당 이익은 상추가 10000 원, 고추가 7000 원이라 할 때, 이 농부가 얻을 수 있는 최대 이익은?

① 350만원

② 410만원

③ 500만원

④ 700만원

⑤ 820만원

해설

상추를 x 평, 고추를 y 평 심는다고 하면

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + 2y \leq 1200 \end{cases}$$

따라서, 이익을 $10000x + 7000y = k(\text{원})$ 이라 하면

이 직선이 두 직선 $x + y = 500$, $3x + 2y = 1200$ 의 교점 $(200, 300)$ 을 지날 때

$10000x + 7000y$ 는 최대값 4100000을 갖는다.

따라서 상추를 200 평, 고추를 300 평 심을 때 최대 이익 410만 원을 얻을 수 있다.

49. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \cdots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값은?

① $(-3)^{2007} + 1$

② 0

③ $3^{2007} + 1$

④ 1

⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$$

50. 좌표평면에서 점 (x, y) 가 부등식 $-x \leq y \leq 2 - x^2$ 의 영역을 움직일 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① $\frac{5}{4}$

② $\frac{7}{4}$

③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{11}{4}$

⑤ $\frac{13}{4}$

해설

연립부등식 $-x \leq y \leq 2 - x^2$ 을 만족시키는 영역은 다음 그림의 어두운 부분이다.

$x + y = k$ 로 놓으면 $y = -x + k$ 이 직선이 포물선 $y = 2 - x^2$ 에 접할 때 k 가 최대가 된다.

$$2 - x^2 = -x + k, \quad x^2 - x + (k - 2) = 0$$

$$D = 1 - 4(k - 2) = 0 \quad \therefore k = \frac{9}{4}$$

따라서 $x + y$ 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$

