1. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

2. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3　② 7　③ -2　④ 0　⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로
$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.
(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$
(최솟값)$=-3$

3. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0$, $(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
$x^2 = t$ 로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

5. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2 ② $-1 + \sqrt{2}$, -3 ③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$,즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉣ − ㉡을 하면 $x=1$
㉣ − ㉢을 하면 $y=2$
㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

7. x 에 대한 이차함수 $f(x)=x^2-2x-a^2+4a+3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

$f(x)=x^2-2x-a^2+4a+3$
$=(x-1)^2-a^2+4a+2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a)=-a^2+4a+2$
$g(a)=-(a-2)^2+6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

8. 두 실수 x, y가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$

$(y + 3)(y - 2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

9. 방정식 $(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$에서
$x^2+x+2=A$라 하면
$A^2=A+2$,
$A^2-A-2=0$, $(A+1)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-1$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x+2=-1$일 때, $x^2+x+3=0$
(ii) $x^2+x+2=2$일 때, $x^2+x=0$
(i), (ii)에서 α, β는 허근이므로 $x^2+x+3=0$의 근이 된다.
따라서, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times3=-5$