

1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$

② $-\frac{5}{3}$

③ 0

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$$

$$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$$p = -\frac{2}{3}, q = -5$$

$$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$$

2. $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3

② 7

③ -2

④ 0

⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 x 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

3. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + 3^3 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{합} : -3 + \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 9$$

$$(i) \ t = 4 \text{ 일 때, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$(ii) \ t = 9 \text{ 일 때, } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

따라서 모든 해의 합은

$$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$$

5. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}, 2$

② $-1 + \sqrt{2}, -3$

③ $1 - \sqrt{2}, 3$

④ $1 - \sqrt{2}, -3$

⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로

$$\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$$

$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

6. 연립방정식
$$\begin{cases} x + 2y = 5 & \dots\dots\textcircled{\text{㉠}} \\ 2y + 3z = -2 & \dots\dots\textcircled{\text{㉡}} \\ 3z + x = -5 & \dots\dots\textcircled{\text{㉢}} \end{cases}$$
 를 풀면 $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$

이다.

이때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

주어진 세 식을 변변끼리 더하면

$$2(x + 2y + 3z) = -2, \text{ 즉 } x + 2y + 3z = -1 \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉤}}$$

$$\textcircled{\text{㉤}} - \textcircled{\text{㉡}} \text{을 하면 } x = 1$$

$$\textcircled{\text{㉤}} - \textcircled{\text{㉢}} \text{을 하면 } y = 2$$

$$\textcircled{\text{㉤}} - \textcircled{\text{㉠}} \text{을 하면 } z = -2$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma = xyz = -4$$

7. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

8. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$ 을 만족시킬 때, y 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$ 에서 x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$$

$$(y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq y \leq 2$$

따라서 y 의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

9. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4 \text{에서}$$

$$x^2 + x + 2 = A \text{라 하면}$$

$$A^2 = A + 2,$$

$$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$$

$$\therefore A = -1 \text{ 또는 } A = 2$$

$$(i) \ x^2 + x + 2 = -1 \text{ 일 때, } x^2 + x + 3 = 0$$

$$(ii) \ x^2 + x + 2 = 2 \text{ 일 때, } x^2 + x = 0$$

(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서, $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = 3$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$$