

1. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$ ② $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$ ③ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$ ⑤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

2. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{ (\omega^2)^{36} - 1 \}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

3. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

4. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^5 (k+l) &= \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l \\ \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l+15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425\end{aligned}$$

5. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100 이고, 11 항부터 20 항까지의 합이 300 일 때 21 항부터 30 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2, a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

6. $a_1 = 1$, $a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$ 이므로

$$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$$

$$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 5n + 6$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$ 은 등차수열이다.
㉡ 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
㉢ $a_n < 0$, $S_n > 0$ 을 동시에 만족하는 자연수 n 의 개수는 2개이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\textcircled{1} \ S_{n+1} - S_n = \{-(n+1)^2 + 5(n+1) + 6\} - (-n^2 + 5n + 6) = -2n + 4$$

따라서 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$ 은 공차가 -2 인 등차수열이다. (참)

$$\textcircled{2} \ a_1 = S_1 = 10$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (-n^2 + 5n + 6) - \{-(n-1)^2 + 5(n-1) + 6\}$$

$$= -2n + 6$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $10, 2, 0, -2, -4, \dots$ 이므로 등차수열이 아니다. (거짓)

$$\textcircled{3} \ a_n < 0 \text{에서 } -2n + 6 < 0, \ n > 3 \ (\because a_1 = 10 > 0)$$

$$S_n > 0 \text{에서 } -n^2 + 5n + 6 > 0, \ n^2 - 5n - 6 < 0$$

$$(n+1)(n-6) < 0, \ n < 6$$

$$\therefore 3 < n < 6$$

즉, 자연수 n 의 값은 $4, 5$ 의 2개이다.(참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

8. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = \log_8 4^n$ 으로 나타내어지는 수열의 일반항 a_n 은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{n}{2}$

④ $\frac{n}{3}$

⑤ $\frac{2}{3}n$

해설

$$S_n = \log_8 4^n = \log_{2^3} 2^{2n} = \frac{2n}{3}$$

$$S_{n-1} = \frac{2(n-1)}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{또 } a_1 = \log_8 4 = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } a_n = \frac{2}{3}$$

9. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 2n + 4$ 로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.
 - ② 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.
 - ③ 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이다.
 - ④ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.
 - ⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 -2인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n + 4 - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\} \\ &= 2n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = S_1 = 3$ 이므로 이 수열의 첫째항은 3이고, 둘째항은 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

10. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{1}$
따라서, $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면
 $\textcircled{1}$ 이 $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로
 $3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$

11. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$$

12. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$ 일 때, $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7}{6}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2 \text{ 에서 } a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) \text{ 이므로}$$

$$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore a^{2x} = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

13. $\log_3(x-6)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

- ① $x > 3$ ② $x < 3$ ③ $x < 6$ ④ $x > 6$ ⑤ $x \geq 6$

해설

$x-6 > 0$ 로부터 $x > 6$

14. $\log_4(x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

- ① $x > 4$ ② $x < 4$ ③ $x < 6$ ④ $x > 8$ ⑤ $x \geq 8$

해설

$x-8 > 0$ 로부터 $x > 8$

15. $(\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36$ 의 값은?

㉠ $-\log_2 3$

㉡ $-\log_3 2$

㉢ 0

㉣ $\log_3 2$

㉤ $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 3) - \log_2 6 \\ &= 1 - \log_2 6 = -\log_2 3 \end{aligned}$$

16. $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ 이고 $\log_{a^3b} ab^3 = 9$ 일 때, $\log_a b$ 의 값은?

① $\frac{13}{3}$

② $\frac{14}{3}$

③ -3

④ 3

⑤ 5

해설

$$\log_{a^3b} ab^3 = \frac{\log ab^3}{\log a^3b} = \frac{\log a + 3\log b}{3\log a + \log b} = 9 \text{에서}$$

$$\log a + 3\log b = 27\log a + 9\log b$$

$$-26\log a = 6\log b$$

$$-\frac{26}{6} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\therefore \log_a b = -\frac{13}{3}$$

17. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ 0 ④ $\log_3 2$ ⑤ $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75 \\ &= \log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 75 \\ &= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}} \\ &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

18. $x = \frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x 과 같은 것은?

- ① a
- ② b
- ③ a^b
- ④ b^2
- ⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\frac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\log_b a} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$