

1. 제 4항이 6, 제 7항이 162 인 등비수열  $\{a_n\}$  의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

①  $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$

②  $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$

③  $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$

④  $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$

⑤  $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

2. 수열  $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$  의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라.  
( $\omega^3 = 1$ )

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이  $\omega$ , 공비가  $\omega^2$ , 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{(\omega^2)^{36} - 1\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때,  $\omega^3 = 1$  이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

3.  $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$ ,  $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$  일 때,  $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250

② 300

③ 450

④ 550

⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \left\{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

4.  $\sum_{l=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \right\}$  의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\sum_{l=1}^5 (k+l) = \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l + 15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425 \end{aligned}$$

5. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2, a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

6.  $a_1 = 1$ ,  $a_{10} = 37$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

### 해설

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$$

이때,  $a_{n+1} - a_n = d = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} & (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99}) \\ &= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200 \end{aligned}$$

7. 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 이  $S_n = -n^2 + 5n + 6$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 수열  $\{S_{n+1} - S_n\}$ 은 등차수열이다.  
 ㉡ 수열  $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.  
 ㉢  $a_n < 0$ ,  $S_n > 0$ 을 동시에 만족하는 자연수  $n$ 의 개수는 2개이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\textcircled{1} \quad S_{n+1} - S_n = \{-(n+1)^2 + 5(n+1) + 6\} - (-n^2 + 5n + 6) = -2n + 4$$

따라서 수열  $\{S_{n+1} - S_n\}$ 은 공차가 -2인 등차수열이다. (참)

$$\textcircled{2} \quad a_1 = S_1 = 10$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (-n^2 + 5n + 6) - \{-(n-1)^2 + 5(n-1) + 6\}$$

$$= -2n + 6$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 10, 2, 0, -2, -4, ... 이므로 등차수열이 아니다. (거짓)

$$\textcircled{3} \quad a_n < 0 \text{에서 } -2n + 6 < 0, n > 3 (\because a_1 = 10 > 0)$$

$$S_n > 0 \text{에서 } -n^2 + 5n + 6 > 0, n^2 - 5n - 6 < 0$$

$$(n+1)(n-6) < 0, n < 6$$

$$\therefore 3 < n < 6$$

즉, 자연수  $n$ 의 값은 4, 5의 2개이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

8. 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합이  $S_n = \log_8 4^n$  으로 나타내어지는 수열의 일반항  $a_n$  은?

①  $\frac{1}{2}$

②  $\frac{2}{3}$

③  $\frac{n}{2}$

④  $\frac{n}{3}$

⑤  $\frac{2}{3}n$

해설

$$S_n = \log_8 4^n = \log_{2^3} 2^{2n} = \frac{2n}{3}$$

$$S_{n-1} = \frac{2(n-1)}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{또 } a_1 = \log_8 4 = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } a_n = \frac{2}{3}$$

9. 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합  $S_n$ 이  $S_n = n^2 - 2n + 4$ 로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.
- ② 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.
- ③ 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이다.
- ④ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.
- ⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 -2인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\&= n^2 - 2n + 4 - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\} \\&= 2n - 3 \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

그런데  $a_1 = S_1 = 3$ 이므로 이 수열의 첫째항은 3이고, 둘째항은 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

10. 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합  $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열  $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수  $k$ 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{㉠}$$

따라서,  $n \geq 2$ 일 때, 수열  $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면  
 $\textcircled{㉠}$ 이  $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로

$$3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$$

11.  $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$  일 때,  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$  의 값은?

①  $\sqrt{2}$

②  $2\sqrt{2}$

③  $\sqrt{2} - 1$

④  $2\sqrt{2} - 1$

⑤  $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에  $a^x$  을 곱하면,

$$\begin{aligned}\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

12.  $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$  일 때,  $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$  의 값은? (단,  $a > 0$ )

①  $\frac{3}{2}$

②  $\frac{4}{3}$

③  $\frac{5}{4}$

④  $\frac{6}{5}$

⑤  $\frac{7}{6}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2 \text{ 에서 } a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) \text{ 이므로}$$

$$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore a^{2x} = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

13.  $\log_3(x - 6)$  의 값이 존재하기 위한  $x$ 의 범위는?

①  $x > 3$

②  $x < 3$

③  $x < 6$

④  $x > 6$

⑤  $x \geq 6$

해설

$x - 6 > 0$ 로부터  $x > 6$

14.  $\log_4(x - 8)$  의 값이 존재하기 위한  $x$ 의 범위는?

①  $x > 4$

②  $x < 4$

③  $x < 6$

④  $x > 8$

⑤  $x \geq 8$

해설

$x - 8 > 0$ 로부터  $x > 8$

15.  $(\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36$  의 값은?

①  $-\log_2 3$

②  $-\log_3 2$

③ 0

④  $\log_3 2$

⑤  $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 3) - \log_2 6 \\ &= 1 - \log_2 6 = -\log_2 3 \end{aligned}$$

16.  $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$  이고  $\log_{a^3b} ab^3 = 9$  일 때,  $\log_a b$  의 값은?

①  $\frac{13}{3}$

②  $\frac{14}{3}$

③  $-3$

④  $3$

⑤  $5$

해설

$$\log_{a^3b} ab^3 = \frac{\log ab^3}{\log a^3b} = \frac{\log a + 3\log b}{3\log a + \log b} = 9 \text{ 에서}$$

$$\log a + 3\log b = 27\log a + 9\log b$$

$$-26\log a = 6\log b$$

$$-\frac{26}{6} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\therefore \log_a b = -\frac{13}{3}$$

17.  $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

①  $-\frac{1}{2}$

②  $-1$

③  $0$

④  $\log_3 2$

⑤  $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75 \\ &= \log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 75 \\ &= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}} \\ &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

18.  $x = \frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$  일 때, 다음 중  $b^x$  과 같은 것은?

①  $a$

②  $b$

③  $a^b$

④  $b^2$

⑤  $\log_a b$

### 해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\frac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\log_b b} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해  $b^x = \log_a b$