1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3(n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

2. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

3. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_3 a_{10}$의 값은?

① $9\log_3 2$ ② $10\log_3 2$ ③ $11\log_3 2$

④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

4. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

5. $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1,\ a_{n+9}-a_{n+2}=35$가 성립할 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2}=a_n+a_{n+2}$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_{n+9}=a_{n+2}+7d$에서 $7d=35$

$\therefore\ d=5$

$\therefore\ a_{100}=1+99\cdot 5=496$

6. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$
$$a_3 = a_2 + 2$$
$$\vdots$$
$$+ \underline{\left| a_n = a_{n-1} + (n-1) \right.}$$
$$a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1)$$
$$= -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$
$$= -1 + 45 = 44$$

7. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10 으로 나눈 나머지가 0 이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

8. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

9. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로
$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① $1,\ \frac{1}{2}$ ② $1,\ 2$ ③ $2,\ \frac{1}{2}$ ④ $2,\ 2$ ⑤ $3,\ \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ (가) = 2,\ (나) = \frac{1}{2}$$

10. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$　　② $2 \cdot 3^{19} + 1$　　③ $2 \cdot 3^{20} - 1$

④ $2 \cdot 3^{20} + 1$　　⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.

$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서

$-2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = -1$

즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은

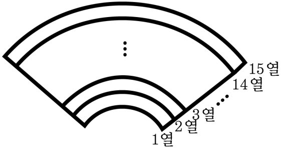
첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

11. 다음 그림과 같이 관람석이 전체 15 열로 이루어진 극장이 있다. 제 n 열의 좌석 수를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = a_n + 1$ 을 만족한다. 제 1 열의 좌석 수가 30 일 때, 이 극장의 총 좌석 수는?



① 1100　② 555　③ 430　④ 330　⑤ 290

해설

$a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 1 인 등차수열이다.

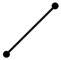
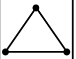
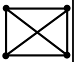
$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot 1$

$= n + 29 (\because\ a_1 = 30)$

따라서, 총 좌석 수는

$\sum_{k=1}^{15}(k+29) = \dfrac{15\cdot 16}{2} + 29\cdot 15 = 555$

12. 컴퓨터가 n대 있는 게임방에서 컴퓨터 사이를 케이블선으로 다음 그림과 같은 방법으로 연결하려고 한다.

컴퓨터의 대수	2	3	4	⋯
전화선의 수	1	2	6	⋯
연결 방법				⋯

이때, 11대의 컴퓨터를 연결하는 데 필요한 케이블선의 개수는?

① 37 ② 45 ③ 55 ④ 66 ⑤ 78

해설

컴퓨터가 n대일 때, 필요한 케이블선의 개수를 a_n 이라고 하면

$a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$a_4 = a_3 + 3$

$\vdots$

$a_{10} = a_9 + 9$

$a_{11} = a_{10} + 10$

위의 식들을 변끼리 더하면

$a_2+a_3+\cdots+a_{10}+a_{11} = a_2+a_3+\cdots+a_{10}+1+2+3+\cdots+9+10$

$\therefore\ a_{11} = 1+2+3+\cdots+9+10 = 55$

13. 자연수 전체의 집합 N을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 다음과 같은 조건을 만족한다.

> ㉠ $x \in N,\ y \in N$이면 $f(x+y) = f(x)f(y)$이다.
>
> ㉡ $f(1) = 3$

수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$으로 정의할 때, a_{10}의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 3^{36} ② 3^{42} ③ 3^{45} ④ 3^{55} ⑤ 3^{66}

해설

㉠에서 $x = n,\ y = 1$로 놓으면

$f(n+1) = f(1)f(n) \quad \therefore\ f(n+1) = 3f(n)$

수열 $\{f(n)\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로 $f(n) = 3^n$

이때, $a_{n+1} = 3^n a_n$이므로

$a_n = a_1 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdots 3^{n-1} = 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$

$= 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\therefore\ a_{10} = 3^{\frac{10\times9}{2}} = 3^{45}$

14. 첫째항이 4 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} = 0$의 두 근 α_n, β_n이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$을 만족시킨다고 할 때, a_7의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 445

해설

이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} = 0$의 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n + \beta_n = a_n$, $\alpha_n\beta_n = a_{n+1}$

이때, 두 근 α_n, β_n이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$을 만족시키므로

$(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$에서 $\alpha_n\beta_n - 2(\alpha_n + \beta_n) + 4 = 7$

$a_{n+1} - 2a_n + 4 = 7$

즉, $a_{n+1} = 2a_n + 3$이고 $a_1 = 4$이므로

$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$에서

$a_n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1}$ $\quad \therefore a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3$

$\therefore a_7 = 7 \cdot 2^6 - 3 = 445$

15. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_2 = -1$

㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$

㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$에서 $n = 1$을 대입하면

$2\sum_{k=1}^{1} a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$

즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$

$\therefore\ a_2 = \dfrac{4a_1 + 1}{3} = -\dfrac{3}{3} = -1$(참)

㉡ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots$ ㉠

$2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots$ ㉡

㉡−㉠에서

$2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$

$2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$

$\therefore\ 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$(거짓)

㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$

$= 2(3a_{n+1} - a_n)$

따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다. (참)

따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

16. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $P_n(a_n)$과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$일 때, 점 P_n의 좌표 a_n은?

① $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$ ② $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$

③ $\frac{25}{6}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$ ④ $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

⑤ $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+3a_n}{2+3}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$$

$$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{3}{5}b_n$

이때, $a_2=5,\ a_1=0$이므로 $b_1=a_2-a_1=5$

$$\therefore b_n=b_1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=0+\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}5\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$=\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

17. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, a_{100}의 값을 구하면?

① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$a_n = 2^n$

$\therefore\ a_{100} = 2^{100}$

18. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$

· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 $b_n = \dfrac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{1}{2}} =$

$3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$이므로 $p + q = -45$

19. $a_1 = 1,\ 4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n을 구하면?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{2n-1}$ ③ $\dfrac{1}{3n-2}$
④ $\dfrac{1}{4n-3}$ ⑤ $\dfrac{1}{5n-4}$

해설

$4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$4 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4n-3}$$

20. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3\ \therefore a_2 = 1$
$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6\ \therefore a_3 = 5$
$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9\ \therefore a_4 = 4$
$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$