1. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x = -1 + \sqrt{3}$ 인 것은?

① $(x+1)^2 = -3$　② $(x+1)^2 = 3$　③ $(x+3)^2 = -1$
④ $(x+3)^2 = 1$　⑤ $(x-1)^2 = 1$

해설

$(x+a)^2 = b$ 에서 $x + a = \pm\sqrt{b}$
$\therefore x = -a \pm \sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면
① $x = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$
② $x = -1 \pm \sqrt{3}$
③ $x = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$
④ $x = -3 \pm \sqrt{1}$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = -2$
⑤ $x = 1 \pm \sqrt{1}$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

2. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot (k-1)\geq 0$

$9+4k-4\geq 0,\ 4k\geq -5$

$\therefore\ k\geq -\frac{5}{4}$

3. 이차방정식 $x^2+8x+2k=0$이 허근을 가지도록 하는 정수 k의 값의 최솟값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4}<0$이어야 하므로,

$16-2k<0,\ 2k>16,\ \therefore\ k>8$

$\therefore$ 정수 k의 최소값은 9

4. $a > b > 1$ 인 실수 $a,\ b$ 에 대하여 다음 중 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$　② $\frac{a}{1-a} > \frac{b}{1-b}$　③ $a+3 < b+3$

④ $a-1 < b-1$　⑤ $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

해설

① 양변에 ab 를 곱하면 주어진 조건과 다르게 나온다.

② $1-a<0, 1-b<0$ 에서 $(1-a)(1-b)>0$ 이므로
양변에 $(1-a)(1-b)$를 곱하면
$a(1-b) > b(1-a),\ a-ab > b-ab,\ a > b$
주어진 조건에 만족한다.

③ 양변에 3을 빼주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

④ 양변에 1을 더해주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

⑤ $1+a>0, 1+b>0$ 이므로 $(1+a)(1+b)$ 를 양변에 곱하면
$a(1+b) < b(1+a)$
$a+ab < b+ab$
$a < b$
주어진 조건을 만족하지 않는다.

5. 두 실수 a, b에 대하여 부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$ 일 때, 부등식 $bx > 2a + 4b$의 해는?

① $x > 0$ ② $x > 1$ ③ $x > 2$ ④ $x > 3$ ⑤ $x > 4$

해설

부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$로 부등호의 방향이 바뀌었으므로
$a < 0$
이때, $x < \frac{b}{a}$에서 $\frac{b}{a} = -2 \therefore b = -2a$
따라서 $bx > 2a + 4b$ 에서 $b = -2a$ 를 대입하면
$-2ax > 2a + 4 \cdot (-2a)$
$-2ax > -6a$
$a < 0$에서 $-2a > 0$이므로
$x > \frac{-6a}{-2a} \therefore x > 3$

6. 부등식 $|x-1|+|x-2|<3$ 을 풀면?

① $-1<x<4$　　② $-1<x<2$　　③ $0<x<1$

④ $0<x<2$　　⑤ $0<x<3$

해설

(ⅰ) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-2)<3,\ -2x<0\ \therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$

(ⅱ) $1\le x<2$일 때

$(x-1)-(x-2)<3,\ 0\cdot x<2$

$\therefore$ 모든 x에 대해 성립

그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$

(ⅲ) $x\ge 2$일 때

$(x-1)+(x-2)<3,\ 2x<6\ \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $0<x<3$

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ 2x^2-9x-18\le 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해의 개수는?

① 7 개 ② 8 개 ③ 9 개 ④ 10 개 ⑤ 11 개

해설

$\begin{cases} x^2-2x+1>0 & \cdots ㈎ \\ 2x^2-9x-18\le 0 & \cdots ㈏ \end{cases}$

㈎에서 $(x-1)^2>0$

$\therefore x\ne 1$인 모든 실수

㈏에서 $(2x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore -\frac{3}{2}\le x\le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\frac{3}{2}\le x\le 6, x\ne 1$

이 범위를 만족하는 정수는

$-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 \\ 2x^2+x-3<0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2<x\le\frac{1}{2}$ ② $-2<x\le 1$ ③ $-\frac{3}{2}<x\le 1$
④ $-\frac{3}{2}<x\le\frac{1}{2}$ ⑤ $1<x\le 2$

해설

$\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 & \cdots (가) \\ 2x^2+x-3<0 & \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $(2x-1)(x+2)\le 0$

$\therefore -2\le x\le\frac{1}{2}$

(나)에서 $(2x+3)(x-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<1$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\frac{3}{2}<x\le\frac{1}{2}$

9. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$　② $x = \sqrt{2}$　③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$　⑤ $x = 6$

해설
$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$
$\therefore\ x = \sqrt{2}$

10. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$

$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$

$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$

$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$

$\therefore\ k + \alpha = -4$

11. x에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

12. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

13. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2+2x+1)+2=0, \quad (x+1)^2=-2$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

14. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \alpha + \beta = -4$

15. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a<7$ ② $a>9$ ③ $6<a\le 9$
④ $6\le a<9$ ⑤ $7<a<9$

해설
$x^2+2(a-5)x+2(3a-19)>0$ 이므로
이 부등식의 $D<0$ 이다.
$D=(a-5)^2-2(3a-19)=a^2-16a+63<0$
$\therefore 7<a<9$

16. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8|\le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8|\le 8$을 풀면
$-8\le x^2-8\le 8$
$0\le x^2\le 16$
$\therefore -4\le x\le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k<x-2<k$
$-k+2<x<k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8|\le 8$을 만족하려면
$-k+2\ge -4,\ k+2\le 4$이어야 하므로
$k\le 6,\ k\le 2$
$\therefore 0<k\le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

17. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $-1<a<3$　③ $0\le a\le 3$

④ $-1<a<4$　⑤ $-1\le a\le 4$

해설

(i) $a=0$일 때, 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D\le 0$이므로
$a^2-3a\le 0$

$\therefore 0<a\le 3(\because a\neq 0)$

18. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

19. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$　② $-6 < a < -2$　③ $a \geq 3$, $a \leq -1$
④ $a \geq 0$　⑤ $a \leq 5$

해설

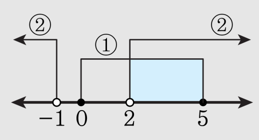
$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$
$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$
항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$
$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$
$\Rightarrow -6 < a < -2$

20. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

21. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

ⅰ) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ⅱ) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

ⅲ) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ \ a \ge 6,\ a \le -6$

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

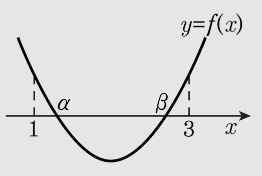
22. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$
(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$
$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$
(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$
(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$
따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

23. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 1

해설

$|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \cdots$①
$\Leftrightarrow ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$②
$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$
$\therefore a = -1$
$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$
$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

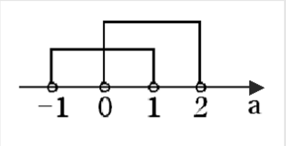
24. $x^2-2ax+1=0,\ x^2-2ax+2a=0$중에서 한 개의 방정식만 허근을 갖도록 양수 a의 범위를 정할 때, $\alpha \le a < \beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\frac{D_1}{4}=a^2-1<0$에서 $-1<a<1$

$\frac{D_2}{4}=a^2-2a<0$에서 $0<a<2$



그림에서 $a>0$이므로 $1 \le a < 2$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=2$

25. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$　　② $p>1$　　③ $-\frac{1}{3}<p<1$

④ $p<-\frac{1}{3}$　　⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

ⅰ) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ⅱ) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

ⅰ) ⅱ)에서 $p<-\frac{1}{3}$