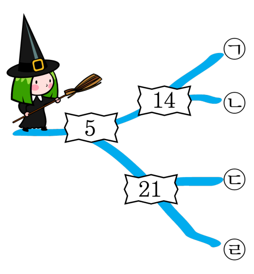
1. 다음은 온라인 수학 게임의 한 장면을 나타낸 것이다. 마법사는 길을 따라 가다가 갈림길에 주어진 수가 소수이면 오른쪽 소수가 아니면 왼쪽 길을 선택한다. 마법사의 최종 도착지는 ㉠ ~ ㉣ 중 어디인지 말하여라.

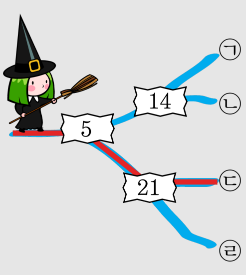


▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

5 는 소수이므로 첫 갈림길에서 오른쪽 길로 간다. 그 다음 21 은 소수가 아니므로 두 번째 갈림길에서는 왼쪽으로 간다. 따라서 최종 도착지는 ㉢이 된다.



2. 다음 보기 중 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 1 은 소수이다.

㉡ 합성수는 약수가 3 개 이상인 수이다.

㉢ 6 의 배수 중 소수는 없다.

㉣ 10 이하의 소수는 모두 5 개이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ 1 은 소수가 아니다.
㉣ 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7 이다.

3. 다음 중 72와 서로소인 것을 모두 고르면?

① 3 ② 5 ③ 13 ④ 24 ⑤ 36

해설

① 72 와 3 의 최대공약수는 3 이므로 서로소가 아니다.
④ 72 와 24 의 최대공약수는 8 이므로 서로소가 아니다.
⑤ 72 와 36 의 최대공약수는 36 이므로 서로소가 아니다.
따라서 주어진 수 중에서 72 와 서로소인 것은 5 와 13 이다.

4. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 가장 작은 소수는 2 이다.

② 100 과 243 는 서로소이다.

③ 두 자연수가 서로소이면 두 자연수는 소수이다.

④ 두 자연수가 서로소가 아니면 두 자연수는 소수가 아니다.

⑤ 10 보다 작은 자연수 중에서 소수는 4 개이다.

해설

③ 반례 : 3 과 4 는 서로소이지만 4 는 소수가 아니다.

5. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 12, 30, 72 의 최대공약수는 6 이다.

② 18, 32, 84 의 최대공약수는 4 이다.

③ 24, 52, 108 의 최대공약수는 4 이다.

④ 16, 48, 120 의 최대공약수는 8 이다.

⑤ 9, 36, 96 의 최대공약수는 3 이다.

해설

①

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 12 & 30 & 72 \\ \hline 3 & 6 & 15 & 36 \\ \hline & 2 & 5 & 12 \end{array}$$

최대공약수 : 6

②

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 18 & 32 & 84 \\ \hline & 9 & 16 & 42 \end{array}$$

최대공약수 : 2

③

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 52 & 108 \\ \hline 2 & 12 & 26 & 54 \\ \hline & 6 & 13 & 27 \end{array}$$

최대공약수 : 4

④

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 16 & 48 & 120 \\ \hline 2 & 8 & 24 & 60 \\ \hline 2 & 4 & 12 & 30 \\ \hline & 2 & 6 & 15 \end{array}$$

최대공약수 : 8

⑤

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 9 & 36 & 96 \\ \hline & 3 & 12 & 32 \end{array}$$

최대공약수 : 3

6. 28의 약수이면서 42의 약수도 되는 수를 모두 찾아 그 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

28 과 42 의 공약수를 구하면 된다.
$28 = 2^2 \times 7$, $42 = 2 \times 3 \times 7$ 이므로
28과 42 의 공약수는 1, 2, 7, 2×7 이고 합은 $1+2+7+14 = 24$ 이다.

7. 토마토 15 개, 키위 21 개를 최대한 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 했더니 모두 3 개씩 남았다. 학생은 최대 몇 명인가?

① 4 명 ② 6 명 ③ 8 명 ④ 10 명 ⑤ 12 명

해설

15 개, 21 개를 똑같이 나누면 3 개씩 남는다면, $(15-3)$ 개, $(21-3)$ 개를 똑같이 나누면 나누어 떨어진다. 이러한 수 중 가장 큰 수는 12 와 18 의 최대공약수 6 이다.

8. 다음 두 수의 최대 공약수와 최소공배수를 각각 구하여라.

$$2 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$2 \times 5 \times 5 \times 7$$

① 최대공약수 : 2, 최소공배수 : 90

② 최대공약수 : 3, 최소공배수 : 1050

③ 최대공약수 : 5, 최소공배수 : 350

④ 최대공약수 : 6, 최소공배수 : 90

⑤ 최대공약수 : 10 , 최소공배수 : 3150

해설

최대공약수 : $2 \times 5 = 10$

최소공배수 : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3150$

9. 다음 중 12 의 약수가 아닌 것은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 12

해설

12 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12 이다.

10. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 16 의 약수의 개수는 5 개이다.
② 모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다.
③ 모든 자연수는 약수가 2 개 이상이다.
④ 21 은 3 의 배수이다.
⑤ 6 은 18 의 약수이다.

해설
1 은 약수가 자기 자신뿐이다.

11. 108 을 소인수분해 한 것으로 옳은 것은?

① 4×27 ② $2^2 \times 3^3$ ③ $2^2 \times 3^2$

④ $2^2 \times 3 \times 5$ ⑤ $2^3 \times 3^2$

해설

$$\begin{array}{r|r} 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

12. 자연수 a, b 에 대하여 $2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하려면 $2^2 \times 5 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 $a = 5$ 일 때 $2 \times 5 = 10$ 이다.

13. $3^2 \times 5 \times 11^3$ 의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 15 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

약수의 개수는 $(2+1) \times (1+1) \times (3+1) = 24$ (개)

14. 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $42\,\text{cm}$, $70\,\text{cm}$, $84\,\text{cm}$ 인 직육면체 모양의 상자를 크기가 같은 정육면체로 빈틈없이 채우려고 한다. 가능한 한 큰 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

▶ 답: cm

▷ 정답: 14 cm

해설

정육면체가 가능한 한 커야하고, 상자의 빈틈이 없도록 채워야 하므로, 주어진 세 모서리의 최대공약수를 구해야 한다.
따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는
$42 = 2 \times 3 \times 7$, $70 = 2 \times 5 \times 7$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ 의 최대공약수
$2 \times 7 = 14\ (\text{cm})$

15. 세 수 12, 24, 36 의 공배수 중 900 이하의 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 12 개

해설

12, 24, 36 의 공배수는 최소공배수 72 의 배수이므로 900 이하의 자연수는 $900 \div 72 = 12 \cdots 36$ 이므로 12 개이다.

16. 두 수 $4 \times x$, $5 \times x$ 의 최소공배수가 80 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$4 \times x$, $5 \times x$ 의 최소공배수는 $2^2 \times 5 \times x = 80$
따라서 $x = 4$ 이다.

17. 세 자연수 3, 4, 5 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 모두 2 인 자연수 중에서 가장 작은 세 자리 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 122

해설

구하는 수는 (3, 4, 5의 공배수) $+ 2$
3, 4, 5 의 최소공배수는 60 이고 60 의 배수는
60, 120, 180, $\cdots$ 이다.
따라서 가장 작은 세 자리의 수는
$120 + 2 = 122$ 이다.

18. 다음 세 자리 수는 3 의 배수이다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

2 $\boxed{}$ 8

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 8

해설

각 자리의 숫자의 합이 3 의 배수이어야 하므로

$2 + \boxed{} + 8 = 10 + \boxed{}$

$\therefore \boxed{} = 2, 5, 8$

19. 자연수 $360 \times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 모두 구하시오.(단, n 은 160 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 40

▷ 정답 : 90

해설

$360 \times n = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 n 은 2×5 이다.
따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는
$2 \times 5 = 10$
$2 \times 5 \times 2^2 = 40$
$2 \times 5 \times 3^2 = 90$
$\therefore$ 10, 40, 90

20. 자연수 $2^3 \times 5 \times 7$ 의 약수 중에서 두 번째로 큰 수를 a , 세 번째로 큰 수를 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$2^3 \times 5 \times 7$ 의 약수 중 두 번째로 큰 수는 $2^2 \times 5 \times 7 = 140$, 세 번째로 큰 수는 $2 \times 5 \times 7 = 70$ 이므로, $a - b = 140 - 70 = 70$ 이다.

21. 다음 중 두 수 $2^2 \times 5^3 \times 11$, $2 \times 5^2 \times 11^2$ 의 공배수가 아닌 것은?

① $2^2 \times 5^3 \times 11^2$　　② $2^2 \times 5^4 \times 11^3$

③ $2^2 \times 5^3 \times 7 \times 11^2$　　④ $2^3 \times 5^2 \times 11^2$

⑤ $2^3 \times 5^3 \times 11^4$

해설

최소공배수가 $2^2 \times 5^3 \times 11^2$ 이므로 5 의 지수가 최소공배수보다 작은 $2^3 \times 5^2 \times 11^2$ 는 공배수가 될 수 없다.

22. 자전거로 공원을 한 바퀴 도는 데 수지는 10분, 진원은 5분, 미수는 7분이 걸린다.
세 사람이 같은 곳에서 출발하여 같은 방향으로 돌 때, 다음에 처음으로 동시에 만나게 되는 것은 출발 후 몇 분 후인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 분 후

▷ 정답 : 70분 후

해설

10, 5, 7의 최소공배수는 70이므로 세 사람은 70분마다 동시에 출발점에서 다시 만나게 된다.

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 10 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & 1 & 7 \end{array}$$

23. 합이 32 이고 최소공배수가 60 인 두 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

▷ 정답 : 20

해설

두 자연수를 a, b 라 두면,
$a+b=32$ 이고 a, b 는 60 의 약수이다.
60 의 약수는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$ 이므로
더해서 32 가 되는 두 수는 $(2, 30), (12, 20)$ 이다.
하지만 $2, 30$ 의 최소공배수는 30 이므로
두 자연수는 $12, 20$ 이다.

24. 서로 맞물려 도는 톱니바퀴 ㉠과 ㉡이 있다. ㉠의 톱니 수는 20, ㉡의 톱니 수는 15일 때, 이 톱니가 같은 이에서 다섯 번째로 다시 맞물리는 것은 ㉡이 몇 바퀴 돈 후인가?

① 16 바퀴　② 18 바퀴　③ 20 바퀴
④ 21 바퀴　⑤ 24 바퀴

해설

20 와 15 의 최소공배수는 60 이다.
같은 지점에 첫번째로 맞물릴 때까지 ㉡ 톱니바퀴는 $60 \div 15 = 4$ (바퀴) 회전하므로
다섯번째로 맞물릴때까지 바퀴 수는 $4 \times 5 = 20$ (바퀴) 이다.

25. 두 분수 $\frac{21}{16}$, $\frac{35}{24}$ 의 어느 것에 곱하여도 그 결과가 자연수가 되게 하는 분수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라.

① $\frac{8}{7}$　② $\frac{48}{7}$　③ $\frac{8}{105}$　④ $\frac{48}{105}$　⑤ $\frac{1}{35}$

해설

구하려는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자.

$\frac{21}{16} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b\text{는 16의 배수} \\ a\text{는 21의 약수} \end{cases}$

$\frac{35}{24} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b\text{는 24의 배수} \\ a\text{는 35의 약수} \end{cases}$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(16,\ 24\text{의 공배수})}{(21,\ 35\text{의 공약수})} \cdots$ ㉠ 이다.

㉠을 만족하는 가장 작은 분수

$\frac{b}{a} = \frac{(16,\ 24\text{의 최소공배수})}{(21,\ 35\text{의 최대공약수})}$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{48}{7}$