1. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$　　② $\sim q \rightarrow p$　　③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$　　⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$

$\therefore q \rightarrow \sim p$

2. 명제 '$a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다 '의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면$a > b$이다 ② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$이다
③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$이다 ④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$이다
⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.
$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$

3. 다음 명제 중 '역'이 참인 것을 고르면? ($a,\ b,\ x,\ y$ 는 모두 실수)

① $a=1$ 이면 $a^2=a$

② $a=b$ 이면 $a^2=b^2$

③ xy 가 홀수 이면 $x+y$ 가 짝수

④ $\triangle\mathrm{ABC}$ 가 정삼각형이면 $\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}$

⑤ 두 집합 A, B 에 대하여 $\mathrm{A}\supset\mathrm{B}$ 이면 $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{A}$

해설

① 역 : $a^2=a$ 이면 $a=1$ 이다.(거짓, 반례 : $a=0$)
② 역 : $a^2=b^2$ 이면 $a=b$ 이다. (거짓,반례 : $a=1, b=-1$)
③ 역 : $x+y$ 가 짝수이면, xy 는 홀수이다. (거짓, x, y 모두 짝수인 경우 xy 는 짝수이다.)
④ 역 : $\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}$ 이면 $\triangle\mathrm{ABC}$ 는 정삼각형이다. (거짓, 두 각이 같으면 이등변삼각형이다.)
⑤역 : $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{A}$ 이면 $\mathrm{A}\supset\mathrm{B}$ 이다.(참)

4. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

5. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$　　② $xy>0$　　③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$xy = |xy|$
(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$
(ii) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$
(i), (ii) 에서
$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

6. 다음은 임의의 실수 $a,\ b$ 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2(\quad ㉠ \quad) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0,\ |a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

7. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$일 때 성립)

8. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0$, $\frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+1+\frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}}+1 \geq 2+1=3$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

9. 전체집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2-2>0$의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0,\ 1\}$ ③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2-2>0$ 에 $x=0$을 대입하면$0-2>0$ (거짓)
$x=1$을 대입하면 $1-2>0$ (거짓)
$x=2$를 대입하면 $4-2>0$ (참)
$x=3$을 대입하면 $9-2>0$ (참)
$x=4$를 대입하면 $16-2>0$ (참)
$x=5$를 대입하면 $25-2>0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

10. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$　　② $P \cup Q^c$　　③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$　　⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

'$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \varnothing$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

11. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ 또는 $x = 4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

12. 명제 '$x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

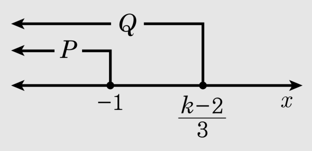
① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설
명제 '$x-2=0$ 이면 $x^2-ax+6=0$ 이다.' 가 참이 되려면 $2^2-2a+6=0$ 을 만족해야 한다.
$2^2-2a+6=0$, $2a=10$
$\therefore a=5$

13. 명제 '$x \le -1$ 이면 $3x+2 \le k$ 이다.' 가 참일 때, 다음 중 상수 k 의 값으로 옳은 것은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설



$p : x \le -1,\ q : 3x+2 \le k$ 라 하고, 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 할 때 명제 $p \to q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

$-1 \le \dfrac{k-2}{3},\ \ -3 \le k-2$

$\therefore\ k \ge -1$

14. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \to p, p \to \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$q \to p, p \to \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P, P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠

㉠에서 $a + 3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡

㉡에서 $2a + 7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

15. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2+y^2=0$ 이기 위한 필요충분조건을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $xy=0$	㉡ $x=y=0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=0$	㉣ $(x+y)(x-y)=0$
㉤ $(x+y)^2+(x-y)^2=0$	㉥ $\lvert x+y\rvert=\lvert x-y\rvert$

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉡, ㉣, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉥
④ ㉡, ㉤, ㉥ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$
㉠ $x=0$ 또는 $y=0$
㉡, ㉢ $x=y=0$
㉣ $x=-y$ 또는 $x=y$
㉤ $x+y=0, x-y=0 \Leftrightarrow x=y=0$
㉥ $x+y=x-y$ 또는 $x+y=-x+y$
$\Leftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서, 보기중 $x^2+y^2=0$ 이기 위한 필요충분조건은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

16. 다음 보기 중 $a^2+b^2 \neq 0$과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

㉠ $a^2+b^2=0$	㉡ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
㉢ $ab \neq 0$	㉣ $a+b \neq 0$ 이고 $ab=0$
㉤ $a^2+b^2>0$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉤

해설

$a^2+b^2 \neq 0$은 a, b중 적어도 하나는 0 이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
㉠ $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.
㉢ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
㉣ $a+b \neq 0$ 이고 $ab=0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
㉤ $a^2+b^2>0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2+b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

17. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \leq 0 \; q : x = 0$
㉡ $p : x^2 + y^2 = 0 \; q : xy = 0$
㉢ $p : a, b$는 유리수 $q : a + b, ab$는유리수

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because$ x 가 실수이다.)
㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1$ $\therefore$ 충분조건이다
㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ 충분조건이다.

18. 두 조건 p, q에 대하여 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다. 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, U는 전체집합이다.)

① $P \cap Q = \varnothing$　　② $P \cup Q = U$　　③ $P \subset Q$

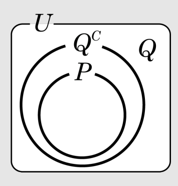
④ $Q \subset P$　　⑤ $Q^c = P$

해설

$P \subset Q^c \Rightarrow P - Q^c = \varnothing \Rightarrow P \cap (Q^c)^c = \varnothing$

$\therefore P \cap Q = \varnothing$

벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



19. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 P, Q 가 조건 p, q를 만족하는 집합이라고 하자. 조건 p가 'x는 소수' 이고 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 집합 Q의 원소가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$U = \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$, $P \subset U$, $Q \subset U$이고 조건 p가 'x는 소수' 이므로 $P = \{2, 3, 5, 7\}$
p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
따라서, 집합 P의 원소가 아닌 것은 집합 Q의 원소가 될 수 없다.

20. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$
④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$이고, 대우 $q \rightarrow p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

21. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$= 2(a+b) - (a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$

$= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$

$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

22. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$　② $A < B$　③ $A \geq B$
④ $A \leq B$　⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$
제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

23. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + \boxed{가} + b^2 - (a^2 + \boxed{나} + b^2)$
> $= 2(\boxed{다}) \geq 0$
> (단, 등호는 $\boxed{라} \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)