

1. 명제  $p \rightarrow \sim q$  의 대우는?

①  $p \rightarrow q$

②  $\sim q \rightarrow p$

③  $\sim q \rightarrow \sim p$

④  $\sim p \rightarrow q$

⑤  $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$  의 대우는  $\sim q \rightarrow \sim p$ ,  $p \rightarrow \sim q$  의 대우는  $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$

$\therefore q \rightarrow \sim p$

2. 명제 ' $a > b$  이면  $a^2 \geq b^2$  이다'의 대우를 구하면?

①  $a^2 \geq b^2$  이면  $a > b$ 이다

②  $a^2 > b^2$  이면  $a \geq b$ 이다

③  $a^2 < b^2$  이면  $a \leq b$ 이다

④  $a \leq b$  이면  $a^2 < b^2$ 이다

⑤  $a \geq b$  이면  $a^2 > b^2$ 이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는  $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$$

3. 다음 명제 중 ‘역’이 참인 것을 고르면? ( $a, b, x, y$  는 모두 실수)

①  $a = 1$  이면  $a^2 = a$

②  $a = b$  이면  $a^2 = b^2$

③  $xy$  가 홀수 이면  $x + y$  가 짝수

④  $\triangle ABC$  가 정삼각형이면  $\angle B = \angle C$

⑤ 두 집합  $A, B$  에 대하여  $A \supset B$  이면  $A \cup B = A$

### 해설

① 역:  $a^2 = a$  이면  $a = 1$  이다. (거짓, 반례:  $a = 0$ )

② 역:  $a^2 = b^2$  이면  $a = b$  이다. (거짓, 반례:  $a = 1, b = -1$ )

③ 역:  $x + y$  가 짝수이면,  $xy$  는 홀수이다. (거짓,  $x, y$  모두 짝수인 경우  $xy$  는 짝수이다.)

④ 역:  $\angle B = \angle C$  이면  $\triangle ABC$  는 정삼각형이다. (거짓, 두 각이 같으면 이등변삼각형이다.)

⑤ 역:  $A \cup B = A$  이면  $A \supset B$  이다. (참)

4. 양수  $a, b, c$ 에 대하여  $a + b + c = 9$ 일 때  $abc$ 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3\sqrt[3]{abc},$$
$$3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

5. 부등식  $|x + y| \leq |x| + |y|$  에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

①  $x = y$

②  $xy > 0$

③  $xy \geq 0$

④  $x \geq 0, y \geq 0$

⑤  $x \leq 0, y \leq 0$

### 해설

$|x + y| = |x| + |y|$  의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

( i )  $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

( ii ) 또  $xy > 0$  이면  $x, y$  는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$  이면 등호가 성립한다.

따라서,  $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

( i ), ( ii )에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

6. 다음은 임의의 실수  $a, b$  에 대하여 부등식  $|a+b| \leq |a|+|b|$  가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\
 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\
 &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2 \\
 &\text{그런데 } |a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \text{ 이므로} \\
 &|a| + |b| \geq |a + b| \text{ (단, 등호는 } (\quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 } (\quad \text{㉢} \quad) \text{일 때, 성립)}
 \end{aligned}$$

- ①  $|ab| + ab, |ab| = ab, ab \leq 0$   
 ②  $|ab| + ab, |ab| = -ab, ab \geq 0$   
 ③  $|ab| - ab, |ab| = -ab, ab \leq 0$   
 ④  $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \geq 0$   
 ⑤  $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned}
 \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\
 &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\
 &= 2(|ab| - ab) \\
 \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\
 &\Rightarrow |ab| = ab \\
 \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다}
 \end{aligned}$$

7. 양수  $x$ 에 대하여  $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

①  $2\sqrt{3}$

②  $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

8.  $x$ 가 양의 실수 일 때,  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의  $x$ 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$ ,  $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  일 때 성립하므로  $x^4 = 1$

따라서 양의 실수  $x$ 는 1이다.

최솟값은 3이고,  $x$ 값은 1이다.

9. 전체집합  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건  $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

①  $\emptyset$

②  $\{0, 1\}$

③  $\{3, 4, 5\}$

④  $\{2, 3, 4, 5\}$

⑤  $U$

### 해설

주어진 조건  $x^2 - 2 > 0$ 에  $x = 0$ 을 대입하면  $0 - 2 > 0$  (거짓)

$x = 1$ 을 대입하면  $1 - 2 > 0$  (거짓)

$x = 2$ 를 대입하면  $4 - 2 > 0$  (참)

$x = 3$ 을 대입하면  $9 - 2 > 0$  (참)

$x = 4$ 를 대입하면  $16 - 2 > 0$  (참)

$x = 5$ 를 대입하면  $25 - 2 > 0$  (참)

따라서 구하는 진리집합은  $\{2, 3, 4, 5\}$

10. 전체집합  $U$  에서 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 할 때, 다음 중 ' $\sim p$  이면  $\sim q$  이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

①  $P \cap Q^c$

②  $P \cup Q^c$

③  $P \cap Q$

④  $P^c \cap Q$

⑤  $P^c \cap Q^c$

해설

' $\sim p$  이면  $\sim q$  이다.'가 거짓이므로 대우명제 ' $q$  이면  $p$  이다.'도 거짓이다. 즉  $Q \subset P$  가 거짓이므로  $Q - P \neq \emptyset$  임을 보이면 된다. 따라서  $Q \cap P^c$  에 속하는 원소이다.

11. 전체집합이  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ ' 의 진리집합은  $\{2, 3\}$  이다.
- ② 조건 ' $x$  는 소수이다.' 의 진리집합은  $\{1, 3, 5\}$  이다.
- ③ 조건 ' $x$  는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은  $\{0, 1, 2, 4\}$  이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$  이고  $x \neq 2$  이다.' 의 진리집합은  $\{0, 1, 3\}$  이다.
- ⑤ 조건 ' $x$  는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은  $\{1, 2, 3\}$  이다.

### 해설

- ①  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  또는  $x = 4$   
 , 따라서, 진리집합은  $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은  $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은  $\{1, 2, 4\}$
- ④  $x = 0, 1, 2, 3$  이고  $x \neq 2$  이므로 진리집합은  $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은  $\{1, 2, 3, 6\}$

12. 명제 ' $x - 2 = 0$  이면  $x^2 - ax + 6 = 0$  이다.' 가 참이 되도록 하는 상수  $a$  의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

명제 ' $x - 2 = 0$  이면  $x^2 - ax + 6 = 0$  이다.' 가 참이 되려면  $2^2 - 2a + 6 = 0$  을 만족해야 한다.

$$2^2 - 2a + 6 = 0, 2a = 10$$

$$\therefore a = 5$$

13. 명제 ‘ $x \leq -1$  이면  $3x + 2 \leq k$  이다.’ 가 참일 때, 다음 중 상수  $k$  의 값으로 옳은 것은?

① -5

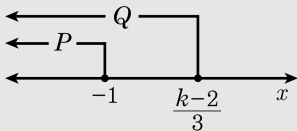
② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설



$p : x \leq -1$ ,  $q : 3x + 2 \leq k$  라 하고, 조건  $p$ ,  $q$  를 만족하는 집합을 각각  $P$ ,  $Q$  라 할 때 명제  $p \rightarrow q$  가 참이므로  $P \subset Q$  이다.

$$-1 \leq \frac{k-2}{3}, \quad -3 \leq k-2$$

$$\therefore k \geq -1$$

14. 전제집합  $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  에서 세 조건  $p, q, r$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q, R$  라 하자.  $P = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Q = \{-1, a+3\}$ ,  $R = \{2, 4, 2a+7\}$  이고  $q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$  가 항상 참일 때,  $a$  의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

### 해설

$q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$  가 참이므로  $Q \subset P, P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots \textcircled{A}$

$\textcircled{A}$ 에서  $a+3 = -1$  또는  $0$  또는  $1$

$\therefore a = -4$  또는  $-3$  또는  $-2$

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{B}$ 에서  $2a+7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서  $\textcircled{A}, \textcircled{B}$  을 동시에 만족시키는  $a$  의 값은  $-2$  이다.

15. 두 실수  $x, y$ 에 대하여  $x^2 + y^2 = 0$  이기 위한 필요충분조건을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠  $xy = 0$

㉡  $x = y = 0$

㉢  $|x| + |y| = 0$

㉣  $(x + y)(x - y) = 0$

㉤  $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$

㉥  $|x + y| = |x - y|$

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉡, ㉣, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉥

④ ㉡, ㉤, ㉥

⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

㉠  $x = 0$  또는  $y = 0$

㉡, ㉢  $x = y = 0$

㉣  $x = -y$  또는  $x = y$

㉤  $x + y = 0, x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

㉥  $x + y = x - y$  또는  $x + y = -x + y$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ 또는 } y = 0$$

따라서, 보기중  $x^2 + y^2 = 0$  이기 위한 필요충분조건은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

16. 다음 보기 중  $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것을 모두 고르면? (단,  $a, b$ 는 실수)

㉠  $a^2 + b^2 = 0$

㉡  $a \neq 0$  또는  $b \neq 0$

㉢  $ab \neq 0$

㉣  $a + b \neq 0$  이고  $ab = 0$

㉤  $a^2 + b^2 > 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉤

해설

$a^2 + b^2 \neq 0$ 은  $a, b$  중 적어도 하나는 0이 아니므로  $a \neq 0$  또는  $b \neq 0$ 이다.

㉠  $a^2 + b^2 = 0$ 이면  $a = 0$  이고  $b = 0$ 이다.

㉢  $ab \neq 0$ 이면  $a \neq 0$  이고  $b \neq 0$ 이다.

㉣  $a + b \neq 0$  이고  $ab = 0$ 이면  $a, b$  둘 중에 하나는 0이 아니다.

㉤  $a^2 + b^2 > 0$ 이면  $a \neq 0$  또는  $b \neq 0$ 이다. 따라서  $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ㉡, ㉤이다.

17. 다음 중  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단,  $x, y$ 는 임의의 실수)

㉠  $p : x^2 \leq 0 \quad q : x = 0$

㉡  $p : x^2 + y^2 = 0 \quad q : xy = 0$

㉢  $p : a, b$ 는 유리수  $q : a + b, ab$ 는 유리수

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ( $\because x$ 가 실수이다.)

㉡  $q \Rightarrow p$  (반례) :  $x = 0, y = 1 \therefore$  충분조건이다

㉢  $q \Rightarrow p$  (반례) :  $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$   
 $\therefore$  충분조건이다.

18. 두 조건  $p, q$ 에 대하여  $\sim q$ 는  $p$ 이기 위한 필요조건이다. 조건  $p, q$ 를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단,  $U$ 는 전체집합이다.)

①  $P \cap Q = \emptyset$

②  $P \cup Q = U$

③  $P \subset Q$

④  $Q \subset P$

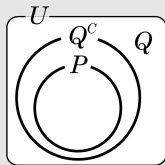
⑤  $Q^c = P$

해설

$$P \subset Q^c \Rightarrow P - Q^c = \emptyset \Rightarrow P \cap (Q^c)^c = \emptyset$$

$$\therefore P \cap Q = \emptyset$$

벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



19. 전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$  의 두 부분집합  $P, Q$  가 조건  $p, q$  를 만족하는 집합이라고 하자. 조건  $p$  가 'x는 소수' 이고  $p$  가  $q$  이기 위한 필요조건일 때, 집합  $Q$  의 원소가 될 수 없는 것은?

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ ,  $P \subset U$ ,  $Q \subset U$  이고 조건  $p$  가 'x는 소수' 이므로  $P = \{2, 3, 5, 7\}$

$p$  가  $q$  이기 위한 필요조건이므로  $Q \subset P$

따라서, 집합  $P$  의 원소가 아닌 것은 집합  $Q$  의 원소가 될 수 없다.

20. 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하고  $\sim p$ 가  $\sim q$ 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

①  $P - Q = \emptyset$

②  $P \cap Q = Q$

③  $P \cap Q = P$

④  $P^c = Q$

⑤  $P = Q$

해설

$\sim p$ 가  $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로  $\sim p \rightarrow \sim q$ 이고, 대우  $q \rightarrow p$ 는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는  $Q \subset P$ 가 성립하므로  $P \cap Q = Q$

21.  $a > 0, b > 0$  일 때,  $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$  의 대소를 바르게 나타낸 것은?

①  $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

②  $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③  $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④  $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤  $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서  $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

22.  $a > 0$  일 때,  $A = 1 + \frac{a}{2}$ ,  $B = \sqrt{1+a}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $A > B$

②  $A < B$

③  $A \geq B$

④  $A \leq B$

⑤  $A = B$

해설

$a > 0$  이므로  $1 + \frac{a}{2} > 0$ ,  $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서  $A^2 > B^2$  이므로  $A > B$  이다.

23. 다음은 임의의 실수  $a, b$ 에 대하여  $|a| + |b| \geq 0$ ,  $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$  이므로  $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가:  $|ab|$ , 나:  $ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $ab$   
 ② 가:  $|ab|$ , 나:  $ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $2ab$   
 ③ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $|ab| - ab$ , 라:  $ab$   
 ④ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $ab$   
 ⑤ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $2ab$

### 해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$