1. 방정식 $\frac{x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{4}$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2)-6=3(2x+1)$
이항하여 정리하면 $4x-6x=3-8+6$, $-2x=1$
$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

2. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2 + 2x + 1 = 0$	㉡ $x^2 + 2x + 4 = 0$
㉢ $x^2 + 4x + 2 = 0$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2 = 0$: 중근

㉡ $a = 1, b' = 1, c = 4$

$1^2 - 1 \cdot 4 = -3 < 0$: 허근

㉢ $a = 1, b' = 2, c = 2$

$2^2 - 1 \cdot 2 = 2 > 0$: 서로 다른 두 실근 (○)

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ -2 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k+2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (k+2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \ k = -1$

4. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2-x-1=0$	㉡ $x^2+x+\frac{1}{4}=0$
㉢ $2x^2-\sqrt{3}x+2=0$	㉣ $x^2-x+2=0$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $D=(-1)^2-4\cdot3(-1)=13>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D=1^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D=(\sqrt{3})^2-4\cdot2\cdot2=-13<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

5. 이차방정식 $2x^2 - x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

$\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2}$

6. 이차방정식 $x^2-2x+a+1=0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a<-1$

해설

(두 근의 곱)$=a+1<0$ $\quad\therefore a<-1$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$
② $1 < k < 3$
③ $k < 3$
④ $3 < k < 5$
⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

8. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0$, $k>1$
$\therefore\ m=1$

9. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k 에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

10. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

11. $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2$일 때 p^2+q^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p=3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q=2$이다.
따라서 $p^2+q^2=9+4=13$

12. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$　　② $x^2+2x+5=0$
③ $x^2+5x+2=0$　　④ $x^2-2x+5=0$
⑤ $x^2-5x+2=0$

해설
$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$
$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$
$\therefore x^2-2x+5=0$

13. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$
② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$
③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$
④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$
⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면
$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$
$\therefore x^2 + 2x + 4$
$= \left\{x - (-1 + 3\sqrt{i}\right\} \left\{x - (-1 - \sqrt{3}i)\right\}$
$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

14. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$

$= ax^2 - 4ax + 4a + 5$ 이므로

$b = -4a, \ -3 = 4a + 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, \ b = 8$

$\therefore a + b = 6$

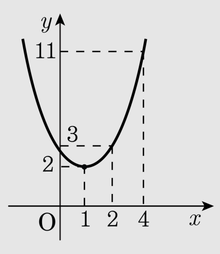
16. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

17. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

18. x의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

19. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근이 아닌 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

$(x-1)(x^3+2x^2-5x-6)=0$

$(x-1)(x-2)(x^2+4x+3)=0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-3,-1,1$ 또는 2

20. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

21. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$
② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$
④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

22. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10　　② -5　　③ 0　　④ 5　　⑤ 10

해설

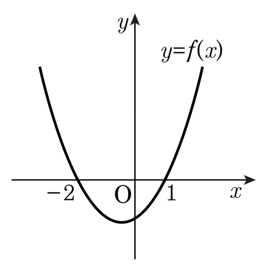
계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

23. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　　③ $1 - \sqrt{2}$, 3
④ $1 - \sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설
한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\ \ \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

24. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y = f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y = f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$
$\therefore a = -3$

25. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$

$y = x + 1 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면

$x^2 + ax + a = x + 1$

$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면

$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$

$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$

$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5

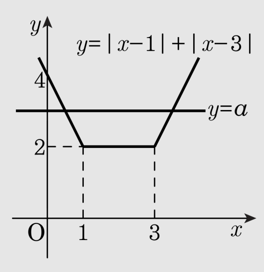
따라서 구하는 a의 값은 6

26. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
$a>2$



27. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

28. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2 \geq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 2$
$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$
$(-2 \leq x \leq 2)$
따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,
$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

29. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

30. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0$,

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

31. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0$,

$3x^2+4x-4\leq 0$, $(x+2)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

32. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 x% 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x$% 감소한다고 한다. 이때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 x% 올리면 상품 1개당 판매 가격이
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로
판매 금액은

$$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$$
$$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$$
$$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$$
$$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$$
$$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$$

따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

33. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$ ㉡ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

㉢ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$w^2 + w + 1 = 0 \ \cdots$ ①

$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots$ ②

㉠ ① 식을 w로 나누면 $w + \dfrac{1}{w} = -1$

㉡ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$

$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$

$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$

㉢ $(w+1)(\overline{w}+1)$

$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$\therefore$ ㉠, ㉢ 맞음