

1. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2$, $y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

2. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0$ 이므로

(준식) $= (x-1)(x-2)(x-3)$

3. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

4. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$$
$$= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$$
양변의 계수를 비교하면
 $a = k - 2, b = 3 - 2k, 3 = k + 1$ $k = 2$ 이므로 $a = 0, b = -1$ $\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$

5. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots \textcircled{1}$
양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면
 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{14} = 1$

6. 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 가 x 에 대한 항등식일 때 $a + b + c$ 의 값은?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c 를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 구한다.

$$15 = a + b + c$$

7. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 를 $x-1, x-2, x-3$ 으로 나누는 나머지가 각각 2, 4, 6일 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나누는 나머지를 구하면?

① 2

② 5

③ 7

④ 11

⑤ 14

해설

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

$$a + b + c = 2, 4a + 2b + c = 4, 9a + 3b + c = 6$$

$$a = 0, b = 2, c = 0$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 2x$$

$$f(4) = 3 \times 2 \times 1 + 8 = 14$$

8. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \underline{5} \end{array}$$

- ① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$
 ④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \underline{b+a} \end{array}$$

$k=1, a=3, b=2, c=1, d=4$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

9. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i = 1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1 = 1$ 이므로

$$a+b+c = 0$$

따라서 ③이다.

10. x 에 관한 항등식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 를 만족시키는 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
 $= (x-1)\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d$
 $= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$
따라서 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a = 1, b = 5, c = 4, d = 5$
 $\therefore abcd = 100$

11. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x - (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ \therefore a &= -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

12. $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$ 로 인수분해 될 때,
 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = (x+1)(x-1)(x^4 + 5x^2 + 6)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

13. $a + b - 2c = 1$, $a - b + 3c = 3$ 일 때, 다음 중 $a + ab + c^2$ 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a - 8)(a - 2)$

② $(a + 8)(a - 2)$

③ $-(a - 8)(a - 2)$

④ $-(a - 8)(a + 2)$

⑤ $-(a + 8)(a - 2)$

해설

$$a + b - 2c = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a - b + 3c = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{에서 } 2a + c = 4$$

$$\therefore c = -2a + 4 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -5 + 9$$

$$\therefore a + ab + c^2 = a + a(-5a + 9) + (-2a + 4)^2$$

$$= -a^2 - 6a + 16$$

$$= -(a^2 + 6a - 16)$$

$$= -(a + 8)(a - 2)$$

14. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
 $(x - 1)(3x^2 + ax + 2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1)$$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$ 는

$x + 2$ 또는 $x + 1$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$ 로 놓을 때

$x + 2$ 가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$ 가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x + 1$ 을 인수로 갖는다.

$x + 1$ 이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

15. 두 다항식 $x^2 + 3x + a$, $x^2 - 3x + b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. $f(0)$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$x - 1$ 이 최대 공약수라면 두 식에

$x = 1$ 을 대입하면 0이 된다.

$A : x^2 + 3x + a$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 + 3 + a = 0 \quad \therefore a = -4$$

$B : x^2 - 3x + b$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - 3 + b = 0 \quad \therefore b = 2$$

$$A : x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$B : x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

최소공배수 $f(x) = (x - 1)(x + 4)(x - 2)$ 가 된다.

$$f(0) = (-1) \cdot (4) \cdot (-2) = 8$$

16. x 에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, pq 의 값을 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + px^2 - q^2$,
 $q(x) = x^3 - (3q - p)x + 2(q - 1)$ 라 놓으면
최대공약수가 $x - 1$ 이므로
 $f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $g(1) = 1 - (3q - p) + 2(q - 1) = 0$ 에서
 $p - q - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $q^2 - q - 2 = 0$, $(q - 2)(q + 1) = 0$
(i) $q = 2$ 일 때, $\textcircled{2} \Rightarrow p = 3$
 $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2$, $g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
 $\therefore G.C.D$ 가 $x - 1$ 이라는 것에 모순
(ii) $q = -1$ 일 때, $\textcircled{2} \Rightarrow p = 0$
 $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$,
 $g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$
 $\therefore G.C.D$ 는 $x - 1$
 $\therefore pq = 0$

17. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4 이다. $A+B=ax^2+bx+c$ 를 만족하는 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
 $A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
 $=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
 $\therefore a=2, b=3, c=-2$
 $\therefore a+b+c=3$

18. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-kx+6 일 때, 두 다항식의 합은?

- ① $2x^2-3x-5$ ② $2x^2-3x+1$ ③ $2x^2-x-1$
④ $2x^2+x-3$ ⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로

$x=1$ 일 때 $1-k+6=0 \quad \therefore k=7$

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$ 이므로

두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$

$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

19. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$ 이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6 일 때 두 이차식을 구하면?

- ① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$
- ③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$
- ⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$
두 이차식은 $(x-1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$ 에서
 x^2+2x-3 , x^2+5x+6

20. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

- ① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B} + \textcircled{C}$ 을 하면
 $2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

21. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0 일 때, 상수 a, b, c 의 곱을 구하면?

- ① 8 ② -8 ③ 12 ④ -12 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x+b)P(x) + x+2 \cdots \textcircled{1} \\ &= (x+b)(x-c)Q(x) - x+4 \cdots \textcircled{2} \\ &= (x-c)(x-a)R(x) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

나머지 정리에 의해

i) ①에서 $f(a) = a+2$, ③에서

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Rightarrow a &= -2 \end{aligned}$$

ii) ①에서 $f(-b) = -b+2$, ②에서

$$\begin{aligned} f(-b) &= b+4 \\ \Rightarrow b &= -1 \end{aligned}$$

iii) ②에서 $f(c) = -c+4$, ③에서

$$\begin{aligned} f(c) &= 0 \\ \Rightarrow c &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore abc = 8$$

22. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ 를 x, y 의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} &2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12 \quad (\leftarrow x\text{에 관하여 정리}) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6) \\ &= \{x + (y + 2)\}\{2x - (y - 6)\} \\ &= (x + y + 2)(2x - y + 6) \\ \therefore a &= 1, b = 2, c = -1, d = 6 \\ \therefore a + b + c + d &= 8 \end{aligned}$$

23. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1
일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z 라 하면 주어진 조건으로부터
 $x + y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 이므로
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 에서 $0^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$
 $\therefore xy + yz + zx = -\frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{3}{2}$ 이므로
 $3xyz = 2(xy + yz + zx)$
 $\therefore xyz = -\frac{1}{3}$
또, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $x + y + z = 0$ 이므로
 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

24. $a + b + c = 0$ 일 때, $\frac{a^2 + 1}{bc} + \frac{b^2 + 1}{ac} + \frac{c^2 + 1}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) + c(c^2 + 1)}{abc} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc}\end{aligned}$$

그런데, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이므로

$$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

25. 세 개의 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = (a-b)(a-c)$ 라 할 때,
 $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ 이면 $[a, b, c]$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = 0$$

$$\text{전개하여 정리하면 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore [a, b, c] = (a-b)(a-c) = 0$$

26. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
 $\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$, $\alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면
 $-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

27. 두 다항식 $x^2 + 3x + p$, $x^2 + px + q$ 의 최소공배수가 $x^3 - 13x + 12$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
($\because AB = GL$)
i) G.C.M. = $x - 1$ 이면 $p = -4$, $q = 3$
이 때 두 식은 $(x - 1)(x + 4)$, $(x - 1)(x - 3)$ 이므로 조건에 맞는다.
ii) G.C.M. = $x - 3$ 이면 $p = -18$, $q = 45$
이 때 두 식은 $(x - 3)(x + 6)$, $(x - 3)(x - 15)$ 이므로 조건에 맞지 않는다.
iii) G.C.M. = $x + 4$ 일 때도 ii)와 같음
i), ii), iii)에서 $p + q = -1$

28. x 에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$ 의 값은?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ 2

해설

$$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

$$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$$

$$\therefore \text{두 다항식의 최대공약수는 } (x-1)(x+1)(x-3)$$

그런데 다항식 $C(x)$ 는 $x-3$ 으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 이다.

$$\therefore \text{다항식 } C(\pm 1) = 0$$

$$\therefore C(1) = -a + b + 4 = 0, \quad C(-1) = a + b + 4 = 0$$

$$\therefore a = 0, \quad b = -4 \text{에서 } a + b = -4$$

29. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 5

해설

$$x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식에 $x=2$ 를 대입하면, $2^n(4+2a+b) = 0$
 $\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \cdots \textcircled{1}$

①을 준식에 대입하면,
$$x^n(x^2+ax-2a-4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$
$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
$$x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$$

다시 $x=2$ 를 대입하면,
$$2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면,
$$b = (-2)(-3) - 4 = 2$$

$\therefore a = -3, b = 2$
 $\therefore a+b = -1$

30. 두 조건 ㉠, ㉡를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$ 의 개수는?

㉠ $f(0) = -1$
㉡ $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$ 이므로
 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$)라 하면
 $f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$ 이다.
 $f(x^2)$ 이 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$ 이라 하면,
 $(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $a + bc - 1 = b \cdots \textcircled{2}$
 $b - c = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 에서 $c = b$, 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b(a + 1) = 0$
 $\therefore b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$ 이면 $\textcircled{2}$ 에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$ 이면 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $b^2 - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2$ 또는 -1
 $\therefore (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$ 의 3 쌍

31. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.
i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
 $a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$
 $\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1		1	0	0	0	0
			1	1	1	1
1		1	1	1	1	<u>1</u> = e
			1	2	3	
1		1	2	3	<u>4</u> = d	
			1	3		
1		1	3	<u>6</u> = c		
			1			
a=1		<u>4</u> = b				

$\therefore 2c - bd = -4$

32. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 0, 2
- ④ 0, 1
- ⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2 - bc = b^2 - ac$ 에서 $(a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$
 $\therefore (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $b^2 - ac = c^2 - ab$ 에서 $(b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$
 $\therefore (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$
한편 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 이므로
i) $a + b + c = 0$ 일 때 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
ii) $a = b = c$ 일 때
(준식) $= 3a^3 - 3a^3 = 0$
따라서 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

33. x 에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는?

- ㉠ $(x-1)g(x)$ ㉡ $(x+1)g(x)$ ㉢ $(x-1)^2g(x)$
㉣ $(x+1)^2g(x)$ ㉤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots$ ㉠
 $x+1$ 과 $x-1$ 이 서로 소이므로
 $x+1$ 은 $g(x)$ 의 인수이다.
따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots$ ㉡로 놓으면
㉠에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots$ ㉢
㉡와 ㉢에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는
 $(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$