1. 명제 'p 이면 q 가 아니다.' 의 역인 명제의 대우를 구하면?

① q 가 아니면 p 이다.

② q 이면 p 가 아니다.

③ p 가 아니면 q 가 아니다.

④ p 가 아니면 q 이다.

⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \rightarrow \sim q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow \sim p \rightarrow q \Rightarrow p$가 아니면 q 이다.

2. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.

② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.

③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.

④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.

⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$

3. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

4. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $(3x + 4y)\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$$

$$= 13 + 12 = 25$$

$$\therefore (3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 25$$

(단, 등호는 $\dfrac{12y}{x} = \dfrac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

5. 양의 실수 a, b, c사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$의 최솟값을 구하여라.

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$$

$$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$$ 에서

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2,\ \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

6. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P^c$ ③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$ ⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$\therefore \mathrm{Q}^c \subset \mathrm{P}^c$

7. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40

④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

8. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.

②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

9. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - (|a+b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a+b)^2$
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a+b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a|+|b|)^2 - (|a+b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a+b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

10. $x > 3$ 일 때 $\dfrac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0,\ \dfrac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

$$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$$

$$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

11. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

12. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

13. 실수 x, y, z 에 대하여 조건 '$x^2+y^2+z^2=0$' 의 부정과 서로 같은 것은?

① $x=y=z=0$

② $x=0$ 또는 $y=0$ 또는 $z=0$

③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이고 $z \neq 0$

④ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$

⑤ $x \neq 0$ 이고 $y=0$ 이고 $z=0$

해설

$x^2+y^2+z^2=0$ 의 부정은 $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ 이다.

$\therefore x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$

14. 두 집합 $A=\{(x,\ y)\mid xy>0\}$, $B=\{(x,\ y)\mid |x+y|<|x|+|y|\}$ 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A\subset B$ ② $B\subset A$ ③ $A=B$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\neq B$

해설

$A: xy>0,\ B: |x+y|<|x|+|y|$ 에서

양변이 모두 양수이므로 제곱하여 정리하면

$x^2+2xy+y^2<x^2+2|xy|+y^2,\ xy<|xy|$

$\therefore\ xy<0$ 이므로 $A\cap B=\varnothing$

15. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow \quad xy = 0$ (참)

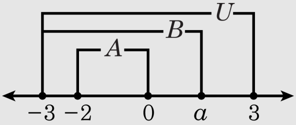
16. $U=\{x|-3\le x\le 3\}$, $A=\{x|-2\le x\le 0\}$, $B=\{x|-3\le x\le a\}$ 라고 할 때, $B^c\subset A^c$ 가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$B^c\subset A^c \leftrightarrow\ A\subset B$ 이므로 위의 그림에서 $0\le a\le 3$ $\therefore$ a 의 최댓값은 3 이다.



17. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.

$x-2=0 \Rightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \therefore a = 3$

18. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a,b 는 실수)

(i) p : a,b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수
(ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ **답 :** 조건

▷ **정답 :** 필요조건

해설

19. a, b, c가 실수일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0$, $q : a = b = 0$

② $p : a$, b 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b$, $q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0$, $q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0$, $q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

p는 q이기 위한 필요충분조건이려면 $p \to q$, $q \to p$가 모두 참이어야 한다.

① $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$

② $p \Rightarrow q$, $q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 1$, $b = 3$)

③ $p \Rightarrow q$, $q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$)

④ $p \Rightarrow q$, $q \nRightarrow p$ (반례 : $a = -1$)

⑤ $p \Rightarrow q$, $q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 0$, $b = 0$)

20. 다음 두 조건 $p : 2 \le x \le 5$, $q : x \ge a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \le x \le 5$ 를 만족하는 영역은 $x \ge a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \le 2$
따라서 a의 최댓값은 2

21. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$

$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$

$(P \cap U) \cap Q = P$

$P \cap Q = P$

$P \subset Q$

$\therefore\ p \Rightarrow q$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

22. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore$ q 는 p 이기 위한 필요조건

23. 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 중 대소를 비교한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 = a + b + 2\sqrt{ab} - 1$$
$$= 2\sqrt{ab}\ (\because a + b = 1) > 0$$
$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$$

24. 세 수 2^{60}, 3^{40}, 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$
② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$
③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$
④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$
⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

25. 부등식 $a^2+b^2>2(a+b-1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

준식을 정리하면

$a^2-2a+1+b^2-2b+1>0,\ (a-1)^2+(b-1)^2>0$

따라서 $a=1,\ b=1$ 일 때만 이 부등식이 성립하지 않는다.

$\therefore a+b=2$