

1. $X = \{x \mid x \text{는 } 10\text{이하의 자연수}\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 $f(x) = (x \text{의 양의 약수의 갯수})$ 로 정의할 때, 함수 f 의 치역의 원소의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$$f(1) = 1, f(2) = f(3) = f(5) = f(7) = 2,$$

$$f(4) = f(9) = 3$$

$$f(6) = f(8) = f(10) = 4$$

$$\therefore f(X) = \{1, 2, 3, 4\}$$

2. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$ (개)이다.

3. 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 이고 $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

임의의 실수 x, y 에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립하므로,

$x = 1, y = 0$ 을 대입하면

$$f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = f(1) + f(1) = 2$$

4. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x) - y = x - f(y) + 1$ 을 만족시키는 함수 f 에 대하여 $f(1)$ 의 값은 얼마인가?

① 0

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$f(x) + f(y) = x + y + 1$$

$$x = y = 1 \text{ 일 때, } f(1) + f(1) = 3$$

$$\text{따라서 } f(1) = \frac{3}{2}$$

5. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 이 정의역인 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = -x^3 + a$ 가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

i) $f(1) = g(1)$ 에서 $a + b = -1 + a$

$$b = -1$$

ii) $f(0) = g(0)$ 에서 $a = b$

$$a = -1$$

$$\therefore ab = (-1)(-1) = 1$$

6. 집합 $A = \{1, a, b\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② 2

③ $\frac{1}{3}$

④ -1

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1)$, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ 이어야 하므로
 $f(1) - g(1) = 0$, $f(a) - g(a) = 0$, $f(b) - g(b) = 0$ 이다.

따라서 $1, a, b$ 는 $f(x) - g(x) = 0$ 의 세 근이다.

즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 의 세 근의 합은

$$1 + a + b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = -\frac{2}{3}$$

7. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 $Y = \{y \mid y \text{는 실수}\}$ 로의 함수 $f(x) = x + 1$ 과 같은 함수 $g(x)$ 는?

① $g(x) = 2x + 1$ ② $g(x) = |x| + 1$ ③ $g(x) = x^2 + 1$

④ $g(x) = x^3 + 1$ ⑤ $g(x) = x^3 - 1$

해설

정의역과 공역이 같으므로 정의역에 속하는 모든 값에 대한 함숫값만 같으면 두 함수는 서로 같다.

$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$

① $g(-1) = -3$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

② $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

③ $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

④ $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$ 이므로 $f = g$

⑤ $g(-1) = -2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

8. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 두 함수 f, g 를 X 에서 Y 로의 함수로 정의한다. $f(x) = x - 1$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f = g$ 에서
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로
 $f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots \textcircled{1}$
 $f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots \textcircled{2}$
 $f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$
 $\therefore abc = 0$