1. $X=\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$, $Y=\{y|y$는 정수$\}$일 때, 함수 $f : X \to Y$가 $f(x) =$ (x의 양의 약수의 갯수)로 정의할 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$f(1)=1, f(2)=f(3)=f(5)=f(7)=2,$
$f(4)=f(9)=3$
$f(6)=f(8)=f(10)=4$
$\therefore f(X)=\{1,2,3,4\}$

2. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

3. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$이고 $f(1)=1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

임의의 실수 x, y에 대하여

$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$가 성립하므로,

$x=1$, $y=0$을 대입하면

$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$

$\therefore \quad f(0)=f(1)+f(1)=2$

4. 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)-y=x-f(y)+1$을 만족시키는 함수 f에 대하여 $f(1)$의 값은 얼마인가?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$f(x)+f(y)=x+y+1$

$x=y=1$일 때, $f(1)+f(1)=3$

따라서 $f(1)=\frac{3}{2}$

5. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$이 정의역인 두 함수 $f(x) = ax+b,\ g(x) = -x^3+a$가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b의 곱 ab를 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

i) $f(1) = g(1)$ 에서 $a + b = -1 + a$

$b = -1$

ii) $f(0) = g(0)$ 에서 $a = b$

$a = -1$

$\therefore\ ab = (-1)(-1) = 1$

6. 집합 $A = \{1, a, b\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $f = g$일 때, $a + b$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　　② 2　　③ $\frac{1}{3}$　　④ -1　　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1)$, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$이어야 하므로
$f(1) - g(1) = 0$, $f(a) - g(a) = 0$, $f(b) - g(b) = 0$이다.
따라서 $1, a, b$는 $f(x) - g(x) = 0$의 세 근이다.
즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$의 세 근의 합은

$$1 + a + b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a + b = -\frac{2}{3}$$

7. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에서 $Y = \{y \mid y\text{는실수}\}$ 로의 함수 $f(x) = x + 1$ 과 같은 함수 $g(x)$ 는?

① $g(x) = 2x + 1$ ② $g(x) = |x| + 1$ ③ $g(x) = x^2 + 1$

④ $g(x) = x^3 + 1$ ⑤ $g(x) = x^3 - 1$

해설

정의역과 공역이 같으므로 정의역에 속하는 모든 값에 대한 함숫값만 같으면 두 함수는 서로 같다.

$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$

① $g(-1) = -3$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

② $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

③ $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

④ $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$ 이므로 $f = g$

⑤ $g(-1) = -2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

8. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{y|y$는 정수$\}$에 대하여 두 함수 $f,\ g$를 X에서 Y로의 함수로 정의한다. $f(x)=x-1,\ g(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, $f=g$가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc를 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f=g$에서

$f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로

$f(-1)=g(-1)$에서 $-2=a-b+c\cdots$㉠

$f(0)=g(0)$ 에서 $-1=c\cdots$㉡

$f(1)=g(1)$ 에서 $0=a+b+c\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=0,\ b=1,\ c=-1$

$\therefore abc=0$